

Isométries de l'espace affine euclidien de dimension finie (2 ou 3 souvent)

Ce devoir a pour but de vous faire réviser les notions de base sur les isométries, et de préparer au passage les leçons sur les isométries, mais aussi sur les sous-groupes finis de $O(2, \mathbb{R})$ et $SO(3, \mathbb{R})$

Exercice 1 Soit $f : E \rightarrow E$ une application linéaire, E étant un espace vectoriel euclidien. Vérifier que f préserve la norme si et seulement si elle préserve le produit scalaire.

Corrigé : Ceci résulte de la formule $\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$.

Exercice 2 Soit E un espace euclidien de dimension finie. Montrer que si f est une isométrie, elle est bijective. Est-ce vrai en dimension infinie? Exemples?

Corrigé : Une isométrie est linéaire, et clairement injective, car elle préserve le produit scalaire et la norme. Elle est donc bijective. En dimension infinie, elle peut ne pas être surjective. Exemple, sur $\mathbb{R}[X]$, considérons l'application f qui à P associe $f(P)$ tq $f(P)(X) = X * P(X)$. Elle est clairement isométrique, mais ne peut pas être surjective, évidemment, car son image ne contient pas les constantes.

Exercice 3 Les transformations classiques rencontrées dans le secondaire (rotations, translations, homothéties, réflexions, symétries ...) sont-elles des applications linéaires? affines? des isométries vectorielles ? isométries affines euclidiennes?

Corrigé : Une translation n'est pas linéaire. C'est une isométrie affine, i.e. une application affine qui préserve la distance euclidienne. Une rotation vectorielle (resp. affine) est une isométrie vectorielle (resp. affine). Une homothétie n'est pas une isométrie. Les réflexions, symétries (= involutions linéaires/affines), les renversements, sont des isométries (vectorielles ou affines).

Exercice 4 a) Soit φ une isométrie de \mathcal{P} plan affine euclidien. Montrer que φ peut s'écrire comme produit de $0 \leq p \leq 2$ réflexions.

b) Montrer qu'une isométrie f d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n s'écrit comme produit de $0 \leq p \leq n$ réflexions par rapport à des hyperplans vectoriels.

c) Montrer qu'une isométrie φ d'un espace affine euclidien E de dimension n s'écrit comme produit de $0 \leq p \leq n + 1$ réflexions par rapport à des hyperplans affines.

Commentaire : La décomposition en produit de réflexions n'est pas unique.

Corrigé a) Une rotation s'écrit comme produit de deux réflexions et l'angle de la rotation est égal à deux fois l'angle orienté entre les axes.

Une translation s'écrit comme produit de deux réflexions par rapport à deux axes orthogonaux au vecteur de translation, et la longueur de translation est le double de la distance entre les deux axes.

Une réflexion est une réflexion.

Une symétrie glissée est la composée d'une réflexion et d'une translation. Elle peut s'écrire comme produit de trois réflexions.

Cf par ex Perrin ch 6.2 et exo2. **b)** On commence par le cas vectoriel. Soit $u \in O(E)$, et $p_u = \text{codim}(Ker(u - Id))$. Montrons que u est engendrée par p_u réflexions, par récurrence sur p_u . Si $p_u = 0$, alors $u = Id_E$ est le produit de 0 réflexions. Si $p_u \geq 1$ il existe $x \in (Ker(u - Id_E))^\perp$, $x \neq 0$. Remarquons que $Ker(u - Id_E)$ est stable par u et u est une isométrie, d'où $(Ker(u - Id_E))^\perp$ est stable par u . Donc $y = u(x) \in (Ker(u - Id_E))^\perp$. De plus, $\langle x - u(x), x + u(x) \rangle = \|x\|^2 - \|u(x)\|^2 = 0$. Soit τ la réflexion définie par $\tau(x - u(x)) = u(x) - x$ et $\tau_{(x-u(x))^\perp} = Id$. Alors $\tau(x + u(x)) = x + u(x)$ (car $x + u(x) \perp x - u(x)$) d'où $\tau u(x) = u(x)$ et $\tau \circ u(x) = x$. De plus, $\tau_{Ker(u-Id)} = Id$, donc $Ker(\tau \circ u - Id) \supset \mathbb{R}.x \oplus Ker(u - Id)$. Donc $p_{\tau \circ u} \leq p_u - 1$. Donc $\tau \circ u$ est produit d'au plus $p_u - 1$ réflexions. Donc u est produit d'au plus p_u réflexions.

Soit maintenant r_u le nombre minimal de réflexions tq $u = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_{r_u}$. Alors $r_u = p_u$. En effet, $r_u \leq p_u$ d'après ci-dessus. Supposons que $u = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_{r_u}$, et soient $H_i = Ker(\tau_i - Id)$ les hyperplans des réflexions τ_i . S'il existe $i \neq j$ tq $\tau_i = \tau_j$, alors il est facile de voir que l'écriture n'est pas minimale ($\tau \circ \tau = Id$, et $\tau \circ \tau' \circ \tau$ est une réflexion, d'où...) Donc toutes les réflexions sont distinctes. Donc $\dim(H_1 \cap \dots \cap H_{r_u}) \geq n - r_u$, et $H_1 \cap \dots \cap H_{r_u} \subset Ker(u - Id)$ d'où $n - r_u \leq n - p_u$.

Par ailleurs, remarquons bien sûr que la décomposition n'est pas unique, et que si $u \in SO(E)$, alors p_u est pair.

c) Si φ est une isométrie affine euclidienne avec un point fixe, alors sa partie vectorielle s'écrit comme produit de $p_u \leq n$ réflexions, et φ aussi.

Si φ est une isométrie affine sans point fixe, elle s'écrit $\varphi = \tau_{\vec{\xi}} \circ g$ où g est une isométrie qui a un point fixe. De plus, $\text{Ker}(\vec{g} - Id) = \text{Ker}(\vec{f} - Id) = \vec{G}$, où G est l'ensemble des points fixes de g , et $\vec{\xi} \in \text{Ker}(\vec{g} - Id) \neq \{0\}$. Donc φ est produit d'au plus $2 + p_{\vec{g}} \leq 2 + n - 1 = n + 1$ réflexions.

Complément $SO(E)$ est engendré par les retournements. Une isométrie u est produit de p_u retournements. (cf Perrin ch 6.3) Commençons par une définition: un retournement ρ est une symétrie orthogonale, i.e. une involution du groupe orthogonal, tq $\dim(\text{Ker}(\rho + id)) = 2$, $\rho^2 = id$, $\rho \in SO(E)$.

Démontrons le résultat. D'abord, si $\dim E = n = 3$, et $u \in SO(E)$, $u \neq Id$, alors $u = \tau_1 \tau_2$ s'écrit comme produit de deux réflexions. Et $-\tau_1$ et $-\tau_2$ sont deux retournements tq $u = (-\tau_1)(-\tau_2)$.

Remarquons que si $u \in SO(E)$, alors p_u est pair.

Le théorème en dimension quelconque (≥ 3) découle alors du lemme suivant:

Si $n \geq 3$ et τ_1, τ_2 sont deux réflexions, alors il existe ρ_1, ρ_2 deux retournements tq $\tau_1 \tau_2 = \rho_1 \rho_2$. (En dimension $n > 3$, $-\tau_1$ n'est pas un retournement...)

Montrons cela. Soient H_1, H_2 les hyperplans associés à τ_1 et τ_2 . On a alors $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2 \geq 1$, et $\dim(H_1 \cap H_2)^\perp = \dim(H_1^\perp \oplus H_2^\perp) = 2$. Soit $V \subset H_1 \cap H_2$ de dimension $n - 3$, $u|_V = Id$. On pose $\sigma_{1|V} = \sigma_{2|V} = \tau_{1|V} = \tau_{2|V} = Id$. Sur (V^\perp) de dimension 3, on pose $\sigma_{i|V^\perp} = -\tau_{i|V^\perp}$.

D'où le résultat.

Références Goblot p25 themes de geometrie th 1.2+prop 1.14, Berger corol 9.33, Perrin, ...

Exercice 5 (Forme réduite) Soit φ une isométrie de l'espace affine euclidien \mathcal{E} de dimension n , et $\vec{\varphi}$ sa partie linéaire.

a) Montrer que $E = \text{Ker}(\vec{\varphi} - Id_E) \oplus \text{Im}(\vec{\varphi} - Id_E)$.

b) Montrer qu'il existe un unique $\vec{v} \in E$ et une unique isométrie ψ avec (au moins) un point fixe tels que $\varphi = t_{\vec{v}} \circ \psi$.

c) Les translations $t_{\vec{v}}$ et ψ commutent-elles?

Cette écriture s'appelle la forme réduite de φ .

Corrigé Voir Audin p59-60, Berger tome 1 page 247 th 9.3.1

a) Le théorème du rang donne $\dim \text{Ker}(\vec{\varphi} - id) + \dim(\text{Im}(\vec{\varphi} - id)) = n$. Et si $u \in \text{Ker}(\vec{\varphi} - id)$, $v \in \text{Im}(\vec{\varphi} - id)$, on trouve

$$\langle u, v \rangle = \langle u, \vec{\varphi}(x) - x \rangle = \langle u, \vec{\varphi}(x) \rangle - \langle u, x \rangle = \langle \vec{\varphi}(u) \vec{\varphi}(x) \rangle - \langle u, x \rangle = 0.$$

D'où le résultat.

b) Soit $a \in \mathcal{E}$, $\varphi(a) \in \mathcal{E}$. On a $\overrightarrow{a\varphi(a)} = \vec{\xi} + \vec{h}$, avec $\vec{\xi} = \varphi(\vec{\xi})$ et $\vec{h} = \vec{\varphi}(t) - \vec{t}$.

Cherchons un point fixe de $\tau_{\vec{\xi}}^{-1} \circ \varphi$. Pour cela, si $x \in \mathcal{E}$ calculons

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x\varphi(x)} &= \overrightarrow{x\vec{a}} + \overrightarrow{a\varphi(a)} + \overrightarrow{\varphi(a)\varphi(x)} \\ &= \overrightarrow{x\vec{a}} + \vec{\xi} + \vec{\varphi}(\vec{t}) - \vec{t} + \vec{\varphi}(\overrightarrow{a\vec{x}}) \\ &= \vec{\xi} + \vec{\varphi}(\vec{t}) - \vec{t} + \vec{\varphi}(\overrightarrow{a\vec{x}}) - \overrightarrow{a\vec{x}} \end{aligned}$$

En particulier, si $x = a - \vec{t}$, alors $\overrightarrow{x\varphi(x)} = \vec{\xi}$. Donc $t_{-\vec{\xi}} \circ \varphi(x) = (t_{\vec{\xi}})^{-1} \circ \varphi(x) = t_{\vec{\xi}}^{-1}(x + \vec{\xi}) = x$. Donc $g = t_{\vec{\xi}}^{-1} \circ \varphi$ a un point fixe x .

Maintenant, $g \circ t_{\vec{\xi}} = t_{\vec{\xi}}^{-1} \circ \varphi \circ t_{\vec{\xi}}$.

On vérifie que $g \circ t_{\vec{\xi}}(a) = g(a + \vec{\xi}) = -\vec{\xi} + \varphi(a + \vec{\xi}) = -\vec{\xi} + \varphi(a) + \vec{\varphi}(\vec{\xi}) = \varphi(a)$. De même on vérifie que pour tout $y \in \mathcal{E}$, $g \circ t_{\vec{\xi}}(y) = \varphi(y)$. De plus, $\vec{g} = \vec{\varphi}$, $\vec{\varphi}(\vec{\xi}) = \vec{\xi}$, donc $\vec{\xi} \in \text{Ker}(\vec{g} - id)$.

Soit $G = \text{Fix}(g)$, $x \in G$, $z \in G$. Alors $\vec{g}(\overrightarrow{xz}) = \overrightarrow{xz}$; ceci équivaut à dire que $\overrightarrow{xz} \in \text{Ker}(\vec{g} - id)$, soit encore $\vec{G} = \text{Ker}(\vec{g} - id) = \text{Ker}(\vec{\varphi} - id)$.

Reste à montrer l'unicité. Supposons $\varphi = t_{\vec{\xi}} \circ g = t_{\vec{\eta}} \circ h$ avec $g(x) = x$ et $h(y) = y$, et $t_{\vec{\xi}} \circ g = g \circ t_{\vec{\xi}}$, et $t_{\vec{\eta}} \circ h = h \circ t_{\vec{\eta}}$. Alors on a forcément $\vec{\xi} \in \text{Ker}(\vec{\varphi} - Id)$ car $\varphi(x) = x + \vec{\xi} = g(x + \vec{\xi}) = x + \vec{g}(\vec{\xi})$. De même, $\vec{\eta} \in \text{Ker}(\vec{\varphi} - Id)$ Alors

$$\text{Im}(\vec{\varphi} - id) \ni \overrightarrow{xy} - \vec{\varphi}(\overrightarrow{xy}) = \overrightarrow{xy} - \overrightarrow{\varphi(x)\varphi(y)} = \vec{\eta} - \vec{\xi} \in \text{Ker}(\vec{\varphi} - id).$$

Donc $\vec{\xi} = \vec{\eta}$ et $g = h$.

Exercice 6 (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt) Soit E un espace euclidien de dimension n . Montrer qu'il existe une base orthonormée de E .

Corrigé On prend un vecteur non nul, x_1 . On le normalise: $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$. On considère l'orthogonal e_1^\perp . Et on recommence. Ainsi on peut démontrer, par exemple par récurrence sur la dimension, l'existence d'une base orthonormée.

Ou alors, on part d'une base (x_1, \dots, x_n) , on pose $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$, $y_2 = x_2 - \langle x_2, x_1 \rangle x_1$, puis $e_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}$, etc.

Exercice 7 On note $O(E)$ le groupe des isométries de E , espace vectoriel euclidien de dimension n , et $O(n, \mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$. Soit $f \in GL(E)$ un isomorphisme, soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée, et soit A la matrice de f dans cette base. Montrer que $f \in O(E)$ ssi $A \in O(n, \mathbb{R})$, i.e. ${}^tAA = Id$.

Corrigé $f \in O(E)$ ssi pour tous $U, V \in \mathbb{R}^n$, on a ${}^tV{}^tAAU = {}^tVU$, ssi ${}^tAA = Id$ ssi $A \in O(n, \mathbb{R})$.

Exercice 8 On considère $O(n, \mathbb{R})$ muni de la topologie induite par la topologie usuelle de $M(n, \mathbb{R})$.

- a) Montrer que $O(n, \mathbb{R})$ est un groupe topologique, i.e. les applications $(A, B) \mapsto AB$ et $A \mapsto A^{-1}$ sont continues.
 b) Montrer que $O(n, \mathbb{R})$ est compact.

Corrigé: a) La multiplication et le passage à l'inverse sont continues car polynomiales en les coefficients.

b) $O(n, \mathbb{R})$ est fermé, comme ensemble des 0 de la submersion $f(A) = {}^tAA - Id$. Il est compact, car pour une norme matricielle, on a $\|{}^tAA\| \leq \|Id\| = 1$. C'est donc un fermé borné donc compact, car on est en dimension finie.

Exercice 9 Qu'est-ce que le choix d'une orientation ? On appelle déplacement de E une isométrie de E préservant l'orientation.

- a) Vérifier que l'ensemble des déplacements forme un groupe, noté $SO(E)$.
 b) Vérifier que $SO(E)$ est l'ensemble des isométries qui peuvent s'écrire comme produit d'un nombre pair de réflexions par rapport à des hyperplans.

Corrigé Choisir une orientation, c'est choisir une base orthonormée particulière. Une autre base orthonormée est dite directe si elle est image de la première par un élément de $SO(E) = \{u \in O(E), \det(u) = 1\}$, indirecte sinon. Un déplacement est donc une isométrie de $SO(E)$. Les déplacements forment un groupe évidemment.

b) Ceci résulte d'un exercice fait plus haut.

Perrin page 147.

Exercice 10 a) Montrer que le groupe $SO(2, \mathbb{R})$ est isomorphe au groupe multiplicatif \mathbb{U} des nombres complexes de module 1.

- b) En déduire qu'il est commutatif.
 c) Montrer que $SO(2, \mathbb{R})$ est homéomorphe à \mathbb{U} et donc connexe.
 d) Le groupe $O(2, \mathbb{R})$ est-il connexe ?

Corrigé On vérifie qu'une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à $SO(2, \mathbb{R})$ ssi $c = -b$ et $a = d$ et $a^2 + b^2 = 1$. On vérifie ensuite que l'application $SO(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{U}$ qui à $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ associe $a + ib$ est un morphisme de groupe. Il est clairement bijectif.

b) Clair.

c) Le morphisme défini en a) est continu, bijectif, d'inverse continu. Donc $SO(2, \mathbb{R})$ est homéomorphe à \mathbb{U} qui est connexe.

d) L'application \det envoie $O(2, \mathbb{R})$ dans $\{\pm 1\}$, et est continue. Donc $O(2, \mathbb{R}) = \det^{-1}(1) \sqcup \det^{-1}(-1)$ s'écrit comme union disjointe de deux fermés. Il n'est donc pas connexe.

Exercice 11 (groupes de rotations du plan) Décrire les sous-groupes finis de $SO(2, \mathbb{R})$.

Corrigé Voir Goblots

Exercice 12 (groupe diédral) On appelle groupe diédral D_n un groupe d'isométries de $O(2, \mathbb{R})$ préservant un polygone régulier P à n côtés.

- a) Décrire le groupe des rotations préservant ce polygone.
 b) Dénombrer les éléments de D_n suivant leur type géométrique (rotation, réflexion, symétrie centrale, ..). Quel est le cardinal total de D_n ?
 c) Si S est un sommet de P , quelle est l'orbite de S par D_n ? Même question pour l'orbite du milieu d'un des côtés de P ? Pour l'orbite d'un point quelconque du plan ?
 d) Décrire les différentes classes de conjugaison de D_n .
 e) Quel est le centre de D_n ?
 f) Quels sont les sous-groupes d'indice 2 de D_n ?
 g) Décrire tous les polygones dont le groupe d'isométries est le groupe D_n préservant P .
 h) Montrer que tous les sous-groupes finis de $O(2, \mathbb{R})$ peuvent être vus comme sous-groupes finis de $SO(3, \mathbb{R})$.

Indication: séparer les cas n pair et n impair, et ... faire un dessin, bien sûr!

Corrigé GOBLOT COMPLETER

Exercice 13 Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble E . On appelle orbite de $x \in E$ l'ensemble $G.x = \{g.x, g \in G\}$, et stabilisateur de x le sous-groupe $Stab(x) = \{g \in G, g.x = x\}$.

a) Montrer que les stabilisateurs des points de l'orbite d'un point $x \in E$ constituent une classe de conjugaison d'éléments de G .

b) Montrer que pour tout $x \in E$, on a $\#Stab(x) \times \#G.x = |G|$.

c) Soit $\mathcal{G} = \{(g, x) \in G \times E, g.x = x\}$. En calculant le cardinal de \mathcal{G} , montrer que le nombre d'orbites distinctes dans E par G est égal au nombre moyen de points fixes d'un élément $g \in G$. Plus précisément,

$$\text{nombre d'orbites} = \frac{\sum_{g \in G} \text{nb de points fixes de } g}{\text{Card } G}$$

d) Soit G un sous-groupe fini de $SO(3, \mathbb{R})$, et soit E l'ensemble des points fixes des éléments de G sur la sphère S^2 , i.e. l'ensemble des intersections des axes des rotations de G avec S^2 . Soit $n = \text{Card } G$, r le nombre d'orbites par G dans E , et δ le nombre des éléments de G d'ordre 2. A l'aide de la question précédente, énumérer les différents types possibles de sous-groupes finis de $SO(3, \mathbb{R})$.

Corrigé a) Si G_x désigne le stabilisateur de x , et $y = h.x$ est dans l'orbite de x , alors $g \in G_y$ ssi $h^{-1}gh \in G_x$. Donc $G_y = gG_xh^{-1}$. Donc les stabilisateurs des points d'une orbite sont conjugués entre eux.

b) L'application $G/Stab(x) \rightarrow G.x$ qui a un élément $g.Stab(x)$ associe $g.x$ est une bijection. On en déduit le résultat voulu.

c) Il s'agit de calculer le cardinal de \mathcal{G} en utilisant Fubini-Tonelli.

d) ... GOBLOT COMPLETER

Exercice 14 Qu'est-ce qu'un polyèdre de \mathbb{R}^3 ? Une face ? un sommet ? le groupe d'isométries du polyèdre ? Mêmes questions avec un polyèdre régulier.

Corrigé HEE GOBLOT COMPLETER

Exercice 15 Décrire les groupes d'isométries et de déplacements préservant un tétraèdre régulier.

Corrigé COMPLETER

Exercice 16 Décrire le groupe des déplacements préservant le cube, et celui de l'octaèdre régulier.

Corrigé COMPLETER

Exercice 17 Comment construit-on un dodécaèdre régulier, et un icosaèdre régulier ? (On pourra construire l'un des deux à partir de l'autre).

Corrigé HEE - GOBLOT COMPLETER

Exercice 18 Décrire le dodécaèdre régulier et l'icosaèdre régulier et leurs groupes d'isométries.

Corrigé MAZET COMPLETER

Exercice 19 Quel(s) polyèdre(s) régulier(s) est (sont) préservé(s) par le groupe fini de $SO(3, \mathbb{R})$ engendré par les trois retournements par rapport aux axes de coordonnées de \mathbb{R}^3 ?

Corrigé Ce groupe est appelé groupe de Klein. Il peut être vu comme un groupe diédral d'ordre 4. Il préserve un cube centré en l'origine, un octaèdre centré en l'origine, un segment centré en l'origine et parallèle à l'un des axes, l'icosaèdre et le dodécaèdre également. **COMPLETER- POURQUOI ?**

Exercice 20 Montrer que $SO(n, \mathbb{R})$ est simple pour $n \geq 3$.

Corrigé PERRIN COMPLETER

Exercice 21 Trouver des conditions suffisantes pour que deux rotations A et B de $SO(3, \mathbb{R})$ engendrent un sous-groupe dense de $SO(3, \mathbb{R})$.

Corrigé COMPLETER