Corrigé du devoir - Intégration

Ce devoir traite des leçons intitulées *Suites et séries de fonctions intégrables. Exemples et applications* et *Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.*

Quelques références bien utiles: Zuily Queffelec (un chapitre entier consacré au sujet), Francinou Giannella Nicolas tome 2, Chambert Loir-Fermigier, plus des bouquins plus théoriques sur les bases de l'intégration.

Quelques notions pourront très utilement être révisées pour ces leçons.
* Etude de la fonction Γ
* Étude de la fonction ζ
* Les grands théorèmes et leurs démos: convergence monotone et dominée, lemme de Fatou, théorème de continuité/dérivabilité/holomorph sous le signe $\int$. Trouver des exemples et contre-exemples pour les illustrer.
* lemme de gronwall
* polynomes de Bernstein et Stone-Weierstrass (cf cours proba L3...)
* la convolution
* les séries de Fourier
* la transformation de Fourier
* Méthodes numériques de calcul d'une intégrale.
* la loi forte (L^1) des grands nombres, le TCL, le théorème de Borel Cantelli.
* Méthode de la phase stationnaire (voir par ex Zuily Queffelec).
* etc

Exercice 1 (Formule de Cauchy) Soit f une application holomorphe définie sur $U \subset \mathbb{C}$, et γ une courbe fermée C^1 incluse dans U. Enoncer, puis démontrer la formule de Cauchy.

Corrigé Voir Rudin. Soit $\gamma : I \to \mathbb{C}$ une courbe C^1 fermée. On définit l'indice d'un poit z par rapport à γ par

$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2i\pi}\int_I \frac{\gamma'(s)ds}{\gamma(s) - z}\,.$$

On montre que cette quantité est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$, à valeurs entières, qui vaut 0 sur la composante connexe non bornée. Ceci se montre aisément en vérifiant que la fonction $t \mapsto \exp(\int_\alpha^t \frac{\gamma'(s)ds}{\gamma(s)-z})$ est constante, et vaut 1 en $t = \alpha = beta$ (où $I = [\alpha, \beta]$).

L'indice d'un point par rapport à γ représente le nombre de tours que la courbe fait autour de z.

Un calcul montre que pour un cercle paramétré positivement, l'indice d'un point du disque vaut 1, et l'indice d'un point extérieur est 0.

Ensuite, on montre que si Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{C}$, f une fonction continue sur Ω, et holomorphe sur Ω sauf éventuellement en un point p, et γ une courbe C^1 fermée à valeurs dans Ω, on a $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Ceci se démontre d'abord lorsque l'image de γ est un triangle, et p n'appartient pas au triangle, en décomposant le triangle en triangles de plus en plus petits, puis en supposant que p est un sommet du triangle, puis intérieur.

Pour une courbe γ quelconque, on introduit la fonction $F(z) = \int_{[a,z]} f(\xi)d\xi$. Le résultat ci-dessus sur les triangles permet de montrer que $F' = f$ (en étudiant la quantité $\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} - f(z_0)$), et donc que $\int_\gamma f(z)dz = 0$ dès que γ est une courbe fermée.

La formule de Cauchy assure que si f est une fonction holomorphe dans un domaine Ω, et γ est une courbe C^1 fermée à valeurs dans Ω,

$$f(z)\,Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$$

Ceci se déduit de ce qui précède en considérant la fonction $g(\xi) = \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z}$ si $\xi \neq z$, et $g(z) = f'(z)$. Alors g est holomorphe sur $\Omega \setminus \{z\}$ et continue en z, donc le résultat ci-dessus s'applique.

Exercice 2 (Lemme de Riemann-Lebesgue) Soit $f \in L^1([0, 2\pi])$. Montrer que $\int_0^{2\pi} f(t)e^{int} \to 0$ quand $n \to \pm\infty$.

Corrigé : C'est très classique. On commence par f l'indicatrice d'un intervalle $[a, b] \subset [0, 2\pi]$. C'est alors un calcul qui mène au résultat. On déduit par linéarité le résultat pour les fonctions en escalier, puis par densité (pour la norme $\|.\|_\infty$) pour toutes les fonctions continues, ou par densité (pour la norme $\|.\|_1$) pour toutes les fonctions intégrables.

A noter : la preuve peut se faire d'abord avec des fonctions C^1, en intégrant par parties, puis par un argument de densité.

Exercice 3 (Intégrales de Wallis) Calculer les intégrales de Wallis $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt$.

Corrigé C'est une récurrence facile, laissée aux lectrices et lecteurs.

Exercice 4 Soit $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}\, dx$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$, puis un équivalent et un DA à deux termes de u_n.

Corrigé Voir [Francinou Gianella Nicolas tome 2, exo 1.40]. la suite u_n tend clairement vers 0 (convergence dominée). La fonction $x \to \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}$ tend rapidement et uniformément vers 0 sur tout compact du type $[0, 1-\varepsilon]$. La difficulté est concentrée au voisinage de 1, sur lequel $\frac{x^n}{\sqrt{1+x}}$ est proche de $x^n/\sqrt{2}$. Heuristiquement, on peut donc s'attendre à un équivalent en $\frac{1}{n\sqrt{2}}$ en intégrant la fonction ci-dessus.

Alors on cherche à majorer $\int_{[0,1]} x^n \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) dx$.

Une manipulation élémentaire des racines carrées donne

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1-x}{\sqrt{2(1+x)}(\sqrt{2}+\sqrt{1+x})} \leq \frac{1-x}{2}$$

On en déduit que

$$\int_{[0,1]} x^n \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) dx \leq \int_{[0,1]} \frac{1}{2}(x^n - x^{n+1})dx = \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \sim \frac{1}{2n^2} \,.$$

D'où $u_n \sim \frac{1}{n\sqrt{2}}$.

Pour le terme suivant, on fait un DL de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ au voisinage de 1, on trouve $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1-x}{4\sqrt{2}} + o(1-x)$, et en injectant cela dans l'intégrale, par le même genre de raisonnement, on trouve que

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2}n} - \frac{3}{4\sqrt{2}n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \,.$$

Je vous renvoie à FGN pour les détails.

Exercice 5 (Méthode de Laplace) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et φ une fonction à valeurs réelles définie sur I, de classe C^2 sur I, tq φ' s'annule uniquement en $x_0 \in I$ et $\varphi''(x_0) < 0$. Soit f une fonction continue définie sur I, à valeurs complexes, tq $f(x_0) \neq 0$ et $\int_I e^{t\varphi(x)}|f(x)|dx < \infty$ pour tout $t > 0$. Montrer que quand $t \to +\infty$, on a

$$F(t) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|\varphi''(x_0)|}}\, f(x_0)\, \frac{e^{t\varphi(x_0)}}{\sqrt{t}} \,.$$

Corrigé: ON suit Zuily Queffelec page 332.

La fonction φ étant C^2, on peut écrire (Taylor) $\varphi(x) = \varphi(x_0) + (x-x_0)^2\psi(x)$, où $\psi(x_0) = \varphi''(x_0)/2$, et ψ est continue sur $[a, b]$, C^2 en dehors de x_0.

Un calcul heuristique en remplaçant $\varphi(x)$ par $\varphi(x_0)+(x-x_0)^2\varphi''(x_0)/2$ donnerait $e^{t\varphi(x_0)} \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{-\varphi''(x_0)}} \int_{(a-x_0)\sqrt{-t\varphi''(x_0)}}^{(b-x_0)\sqrt{-t\varphi''(x_0)}} e^{-y^2/2} f($ $x_0)dy$, qui est équivalente à

$$e^{t\varphi(x_0)} \frac{f(x_0)}{\sqrt{t}\sqrt{-\varphi''(x_0)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2}dy = e^{t\varphi(x_0)} \frac{f(x_0)}{\sqrt{t}\sqrt{-\varphi''(x_0)}\sqrt{2\pi}}$$

On va essayer de faire fonctionner ce calcul heuristique.

Par continuité, il existe un intervalle $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ sur lequel ψ est strictement négative. Soit $0 \leq \theta \leq 1$ une fonction C^∞ à support dans cet intervalle, qui vaut 1 si $|x - x_0| \leq \delta/2$. On décompose notre intégrale en

$$\int_a^b e^{t\varphi(x)}\theta(x)f(x)dx + \int_a^b e^{t\varphi(x)}(1-\theta(x))f(x)dx = F_1(t) + F_2(t)$$

On va rendre rigoureux l'argument ci-ddessus dans l'étude de F_1, et montrer que $F_2(t)$ est négligeable par rapport à $F_1(t)$ quand $t \to \infty$.

Pour l'étude de $F_1(t)$, on commence par faire le changement de variables $z = (x - x_0)\sqrt{-\psi(x)}$, ce qui est possible sur le support de θ. On a alors $x = g(z)$, avec $g(0) = x_0$, $g'(0) = \frac{1}{\sqrt{-\varphi''(x_0)/2}}$ et

$$F_1(t) = e^{t\varphi(x_0)} \int_{\mathbb{R}} \theta(g(z))f(g(z))e^{-tz^2}dz \,.$$

Un second changement de variable $y = \sqrt{t}z$ donne

$$e^{-t\varphi(x_0)}\sqrt{t}F_1(t) = \int_{\mathbb{R}} \theta(g(\frac{y}{\sqrt{t}})f(g(\frac{y}{\sqrt{t}}))e^{-y^2}dy$$

Le théorème de convergence dominée assure la convergence du terme de droite vers $f(x_0)\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}dy = \sqrt{\pi}f(x_0)$, ce qui donne le terme souhaité pour l'équivalent de $F_1(t)$.

Il nous reste à étudier $F_2(t)$. Remarquons que sur le support de $1-\theta$, $|x-x_0| \geq \delta/2$. Or φ' ne change qu'une fois de signe, elle est donc strictement négative après x_0 et strictement positive avant. On peut donc trouver $\mu > 0$ tq $\varphi(x_0)-\varphi(x) \geq \mu > 0$ sur le support de $1-\theta$ (EXO pour les détails). On majore $e^{t\varphi(x)}$ par $e^{t\varphi(x_0)-t\mu}$ dans l'expression de $F_2(t)$ pour obtenir le résultat voulu: la quantité $e^{-t\varphi(x_0)}F_2(t)$ est équivalente à $e^{-t\mu}\int_a^b f(x)(1-\theta)(x)dx$ et donc tend vers 0 quand $t \to +\infty$. (COMPARER avec la redaction de ZQ pour verifier).

Exercice 6 (théorème d'Egorov) Soit $(X, \mathcal{B}, m)$ un espace de probabilité, et (f_n) une suite de fonctions mesurables convergeant p.s. vers une fonction mesurable m. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble X_ε de mesure au moins $1-\varepsilon$ sur lequel (f_n) converge uniformément vers f.

Corrigé: Soit $S(n,k) = \cap_{i,j>n}\{x \in X, |f_i(x) - f_j(x)| \leq \frac{1}{k}\}$. Pour tout x fixé, la suite $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy. Donc pour tout x fixé, et k fixé, il existe N tq pour $n \geq N$, $x \in S_{n,k}$. Donc $\cup_{n\in\mathbb{N}}S(n,k) = X$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $k \geq 0$ fixés; alors il existe N_k tq pour $n \geq N_k$, $m(S(n,k)) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. On en déduit que $m(S(N_k,k)^c) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$, donc $m(\cup_{k\geq 0}S(N_k,k)^c) \leq \varepsilon$, Et on vérifie que sur $\cap_{k\geq 0}S(N_k,k)$, la suite (f_n) converge uniformément vers f.

Exercice 7 Soit (f_n) une suite de fonctions L^2 qui converge dans L^2 vers $f \in L^2$. Montrer qu'il existe une sous-suite f_{n_k} qui converge p.s. vers f.

Corrigé: C'est un classique, souvent utilisé. Quitte à considérer $f_n - f$, supposons que $f_n \to 0$ dans L^2. Alors il existe une sous-suite f_{n_k} tq $\|f_{n_k}\|_2 \leq 2^{-k}$. Donc $\sum_{k\geq 0}\|f_{n_k}\|_2 < \infty$. Donc $\left\|\sum_{k=0}^K f_{n_k}\right\| \leq \sum_{k\geq 0}\|f_{n_k}\|_2 < \infty$. Donc $\sum_{k=0}^{\infty} f_{n_k} \in L^2$. Donc $f_{n_k} \to 0$ dans L^2.

Exercice 8 (Fonctions plateau) Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$, Ω un voisinage ouvert de K. Montrer qu'il existe une fonction $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tq $\theta = 1$ sur K, $\theta = 0$ sur Ω^c et $0 \leq \theta \leq 1$.

Corrigé: Voir par ex Zuily Queffelec, chapitre 9, "fonctions définies par des intégrales".

C'est une simple application des résultats classiques de convolution.

Introduisons d'abord la fonction $\rho_0(x) = \exp(\frac{1}{1-\|x\|})$ si $\|x\| \leq 1$, et $\rho_0(x) = 0$ si $\|x\| \geq 1$. Alors la fonction $\rho(x) = \frac{\rho_0(x)}{\int_{\mathbb{R}^n}\rho_0(x)dx}$ est positive, de classe C^∞ (EXO!), nulle en dehors de la boule unité de $\mathbb{R}^n$, et d'intégrale 1.

Choisissons $\varepsilon_0 > 0$ tq $K \subset K_{\varepsilon_0} = \{x \in \mathbb{R}^n, d(x,K) \leq \varepsilon_0\} \subset \Omega$. (POURQUOI est-ce possible?? EXO).

Considérons la fonction $\rho_\epsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\rho(\frac{x}{\epsilon})$, pour $\varepsilon = \varepsilon_0/2$. Alors, ρ_ε est positive, C^∞, d'intégrale 1, et de support inclus dans $B(0,\varepsilon)$.

Il reste alors à montrer que la fonction $\theta_\varepsilon = 1_{K_\varepsilon} * \rho_\varepsilon$ est comprise entre 0 et 1, C^∞, vaut 1 sur K, et 0 sur $K_{2\varepsilon}^c = K_{\varepsilon_0}^c \supset \Omega^c$.

Le fait que $0 \leq \theta_\varepsilon \leq 1$ est élémentaire car $0 \leq 1_{K_\varepsilon} \leq 1$ et $\int \rho_\varepsilon = 1$.

Le fait qu'elle soit C^∞ résulte du fait qu'on convole une fonction intégrable (1_{K_ε}) avec une fonction C^∞ à support compact (ρ_ε).

La fonction θ_ε est clairement à support dans $Supp(1_{K_\varepsilon}) + Supp(\rho_\varepsilon) = K_{2\varepsilon}$. (Si ce n'est pas clair pour vous, c'est tout du moins classique quand on convole une fonction à support compact avec une autre fonction).

La seule chose qui reste à démontrer est que $\theta_\varepsilon = 1$ sur K. Observons que

$$1 = \rho_\varepsilon * 1 = \rho_\varepsilon * 1_{K_\varepsilon} + \rho_\varepsilon * 1_{K_\varepsilon^c}.$$

Le premier terme de la somme vaut exactement θ_ε, tandis que le second est à support dans $Supp(\rho_\varepsilon) + Supp(K_\varepsilon)^c = K^c$. Ainsi, si $x \in K$, le deuxième terme est nul, d'où $\theta_\varepsilon(x) = 1$.

Exercice 9 (Théorèmes de densité) Montrer que
* $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $C^k(\mathbb{R}^n)$,
* $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $1 \leq p < \infty$
* $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ n'est pas dense dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$

Corrigé: On suit encore ZQ. Ce sont des théorèmes classiques, on n'en donne que la trame.

Soit ρ une fonction plateau, qui vaut 1 sur $B(0,1)$, 0 hors de $B(0,2)$ et vérifie les propriétés de l'exo précédent. Alors $\rho_j = \rho(\frac{x}{j})$ est aussi C^∞ à support compact, à support dans $B(0,2j)$, et vaut 1 sur $B(0,j)$. Si f est dans $C^k(\mathbb{R}^n)$, on peut vérifier (EXo, voir ZQ) que $\rho_j f$ (c'est un produit simple, pas une convolution) est dans $C_c^k(\mathbb{R}^n)$, et surtout $\rho_j f$ converge uniformément vers f ainsi que toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre k (c'est la définition de la convergence en norme C^k.)

De même, si f est dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, alors $\rho_j f \to f$ dans L^p. (EXO, voir ZQ par ex)

Il nous suffit donc de vérifier la densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $C_c^k(\mathbb{R}^n)$ pour la topologie C^k, et dans $L_c^p(\mathbb{R}^n)$ pour la topologie L^p. Ceci va se faire par convolution.

Pour $k=0$, on démontre que $\rho_\varepsilon * f$ est continue à support compact (clair), et converge uniformément vers f quand $\varepsilon \to 0$. Pour cela, on écrit

$$\rho_\varepsilon * f(x) - f(x) = \int \rho_\varepsilon(y)(f(x-y) - f(x))dy = \int \rho(z)(f(x-\varepsilon z) - f(x))dz$$

La deuxième égalité s'obtient par un changement de variable immédiat. Ensuite, on utilise le fait que f est continue à support compact, donc uniformément continue, pour majorer le terme de droite, quand ε est assez petit, par une quantité aussi petite qu'on veut. D'où la convergence uniforme en x de $\rho_\varepsilon * f$ vers f.

Pour $k \geq 1$, on considère encore $\rho_\varepsilon * f$, bien sûr, et on observe que pour tout multi-indice α tq $|\alpha| \leq k$, on a $D^\alpha(\rho_\varepsilon * f) = \rho_\varepsilon * D^\alpha f$ qui converge uniformément vers $D^\alpha f$ par l'argument ci-dessus. Donc $\rho_\varepsilon * f$ converge vers f en topologie C^k.

Pour $f \in L_c^p(\mathbb{R}^n)$, on écrit comme ci-dessus

$$\rho_\varepsilon * f(x) - f(x) = \int \rho(z)(f(x-\varepsilon z) - f(x))dz$$

$$\leq \int \rho^{1/q}(z)\rho^{1/p}(z)|f(x-\varepsilon z) - f(x)|dz \leq \left(\int \rho(z)dz\right)^{1/q}\left(\int \rho(z)|f(x-\varepsilon z) - f(x)|^p dz\right)^{1/p}$$

Par Tonelli, on en déduit que

$$\|\rho_\varepsilon * f - f\|_p^p \leq \int \rho(z)\|f(.-\varepsilon z) - f\|_p^p dz$$

Admettons un instant que $\|f(.-\varepsilon z) - f\|_p \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$. Alors on conclut que $\rho_\varepsilon * f - f \to 0$ dans L^p par convergence dominée.

Pour voir que $\|f(.-\varepsilon z) - f\|_p \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$, on remarque d'abord que c'est clair dès que f est continue à support compact, et on utilise la densité des fonctions continues à support compact dans L_c^p pour conclure en général.

Pour vérifier la non densité des fonctions $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, observez que si $f \equiv 1$, alors n'importe quelle fonction φ continue à support compact vérifiera $\|f - \varphi\|_\infty = 1$, le sup étant réalisé en dehors du support de φ.

Exercice 10 (Fonction d'Airy) Etudier la fonction définie par

$$Ai(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx + i\frac{x^3}{3}} dx, \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}\,.$$

Montrer en particulier qu'elle est C^2 sur $\mathbb{R}$, puis qu'elle est solution de l'équation $u'' - tu = 0$. En déduire qu'elle est C^∞.

Corrigé: cf Zuily Queffelec chapitre IX-V.
Idees non exhaustives pour des lecons
Integrales de Wallis
Formule de Cauchy
Methode de Laplace
Méthode de la phase stationnaire
Loi des grands nombres et TCL, Borel Cantelli
Th d'Egorov : une suite de fonctions int qui CVS CVU sur un gros ensemble.
Si une suite CV dans L2 il existe une sous suite qui CV ps.
Fourier (Series, Transformee), convolution
Interversion limite et integrale (Beppo Levi, CV monotone, Fatou)
Fonction zeta,
Fonction Gamma