

Calcul différentiel. Corrigé du devoir

- Exercice 1** a) On veut étudier $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Que fait-on? Quels sont les outils de calcul? De représentation visuelle?
 b) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à deux variables. Comment (intuitivement) étudier ses variations, ses extrema, la représenter.
 c) Même question avec $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.
 d) Géométriquement (et sans démonstration) comment peut-on ramener l'étude d'une fonction $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ à celle d'une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

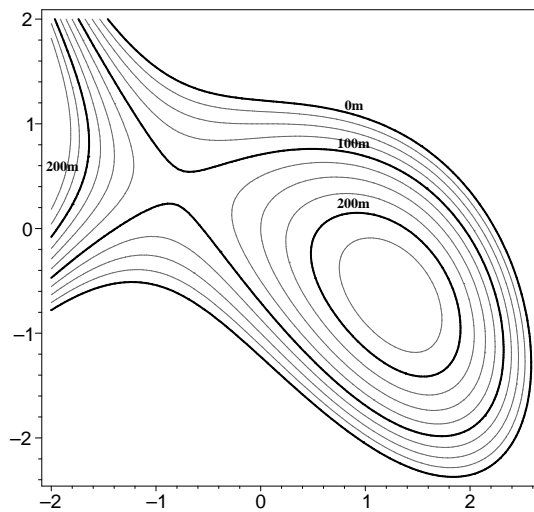
- a) On regarde le graphe, la dérivée, le tableau de variations, etc.
 b) On peut fixer un plan vertical et étudier une fonction d'une seule variable. Fixer un plan horizontal $z = c$ et étudier la *ligne de niveau* $f^1(c)$. Faire faire le graphe en 3D sur un ordi, faire une maquette en 3D du graphe.
 Pour étudier les variations, les extrema : on étudie la variation des lignes de niveau, leur espacement, les points critiques de la différentielle.
 c-d) On peut raisonner coordonnée par coordonnée, chercher les points critiques, ... on est un peu démunis pour représenter f , sauf si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dans ce cas, on peut au moins représenter la nappe paramétrée image.

- Exercice 2 (Manipulations de la définition)** a) Définition d'une application différentiable $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.
 b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application constante. Calculer sa différentielle.
 c) Même question avec une application linéaire.
 d) Soit $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique, et φ la forme bilinéaire symétrique associée. Calculer la différentielle de q .
 e) Soit $f(x, y, z) = (x^2y + \ln(\frac{y}{z}), \sqrt{x^2 - y^2})$. Chercher son ensemble de définition. Calculer ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ dans les directions des axes, sa différentielle au point (x_0, y_0, z_0) , son gradient au même point. Quels sont les ensembles dans lesquels vivent tous ces objets (dérivée partielle, gradient, différentielle).
 f) Mêmes questions avec les fonctions suivantes: $g(x, y) = (\frac{x}{\sqrt{y}}, \frac{y}{x}, x + y)$ et $h(x, y, z) = (xy, yz, zx)$.

- a) Cours.
 b) $f(a + h) - f(a) = c - c = 0$. Donc $df_a = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)}$.
 c) $f(a + h) - f(a) = f(h)$ par linéarité. Donc $df_a = f$ pour tout $a \in \mathbb{R}^2$.
 d) $q(a + h) - q(a) = 2\varphi(a, h) + q(h)$ (par symétrie de φ). Par Cauchy-Schwarz, $|q(h)| = O(\|h\|^2) = o(\|h\|)$ quand $h \rightarrow 0$. Donc $dq_a = 2\varphi(a, \cdot)$.
 e) f est définie dès que $y/z > 0$ et $x^2 \geq y^2$. Elle est C^∞ sur l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y/z > 0 \text{ and } x^2 > y^2\}$. On calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = (2xy, \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}})$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = (x^2 + \frac{1}{y}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}})$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = (\frac{-1}{z}, 0)$. La différentielle de f au point (x, y, z) est l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 dont la matrice dans les bases canoniques de \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^2 a pour vecteurs colonne les dérivées partielles par rapport aux coordonnées. Le gradient n'a pas de sens ici. Si $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une application différentiable, sa différentielle au point $a \in U$ est une forme linéaire sur \mathbb{R}^n . Le théorème de Riesz assure qu'il existe un unique vecteur $\nabla F(a)$ de \mathbb{R}^n tel que $dF(a) = \langle \nabla F(a), \cdot \rangle$ (égalité entre formes linéaires sur \mathbb{R}^n).
 f) g est définie et C^∞ dès que $x \neq 0$ et $y > 0$. On calcule $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = (\frac{1}{\sqrt{y}}, -\frac{1}{x^2}, 1)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = (-\frac{x}{2y\sqrt{y}}, \frac{1}{x}, 1)$, et $dg_{(x,y,z)}$ est l'application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 dont la matrice dans les bases canoniques a pour vecteurs colonnes les dérivées partielles. On note encore $dg_{(x,y,z)} = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)dy$. Le gradient n'a toujours pas de sens ici.
 Un dernier calcul. h est définie sur \mathbb{R}^3 . On a $\frac{\partial h}{\partial x}(x, y, z) = (y, 0, z)$; $\frac{\partial h}{\partial y}(x, y, z) = (x, z, 0)$; $\frac{\partial h}{\partial z}(x, y, z) = (0, y, x)$. Pour la différentielle et le gradient: idem que plus haut.

- Exercice 3 (Skieur, exo de L1, initiation douce au calcul diff, exercice de F. Pham)** La figure ci-dessous est une carte du relief d'une presqu'île: le contour extérieur est la ligne de niveau 0 (bord de mer). L'équidistance des lignes de niveau est de 25 mètres.
 1) **Partie expérimentale** a) Un skieur de fond perdu dans le brouillard s'arrête, les skis bien horizontaux pour ne pas glisser, et cherche à se repérer à l'aide de son altimètre et de sa boussole. Il voit qu'il se trouve à 100 mètres d'altitude, avec ses skis orientés droit vers l'est. La pente est descendante vers sa gauche. Quelle est sa position sur la carte ?¹
 b) Le skieur décide de continuer son chemin à la boussole, droit vers l'est, jusqu'à atteindre la mer. Dessinez le profil du relief le long de l'itinéraire qui l'attend, en évaluant les dénivelés successifs.
 c) Regardant mieux son altimètre avant de se mettre en route, le skieur s'aperçoit avec effroi que celui-ci est cassé, de sorte qu'il ne peut connaître son altitude et que ce qu'il avait déduit en (a) est erroné. Tracez sur la carte l'ensemble de ses positions possibles. Un plaisancier mouillant dans la baie située au sud de la presqu'île voudrait franchir la presqu'île à skis pour rejoindre la côte nord, en se dirigeant toujours droit vers le nord.
 d) Dessinez le profil du relief le long de divers itinéraires sud-nord, en évaluant pour chacun de ces itinéraires l'altitude du point culminant. En quel point de la baie le plaisancier doit-il aborder pour que son dénivelé soit le plus petit possible ? Marquez sur la carte le point culminant de son itinéraire, et évaluez-en l'altitude.
 e) La presqu'île est soumise à un fort vent du nord. Coloriez sur la carte la zone de la presqu'île abritée du vent, en essayant de délimiter avec précision le bord de cette zone.
 f) En quel(s) point(s) de la carte un skieur, perdu dans un épais brouillard, aura-t-il l'impression d'être sur un plateau ?

¹Deux positions possibles



2) Partie « calculs » En fait la fonction de la figure a pour expression $f(x, y) = -\frac{x^3}{3} - xy - y^2 + x + \frac{3}{2}$ (les valeurs des niveaux étant exprimées en centaines de mètres).

- Discutez, en fonction du paramètre v , l'allure du graphe de $f_{|y=v}$ (restriction de f à la droite ouest-est de latitude v).
- Précisez par le calcul votre résultat de la question 1b).
- Discutez, en fonction du paramètre u , l'allure du graphe de la fonction $f_{|x=u}$ (restriction de f à la droite sud-nord de longitude u), et précisez par le calcul vos résultats de la question 1d).
- Retrouvez et précisez par le calcul votre résultat de la question 1f).

3) Calcul d'un plan tangent Le skieur de 1a) est en fait à l'altitude de 216,66 mètres (mais il ne le sait pas !). Cela correspond à $z = 13/6$ centaines de mètres. Étant dans les conditions de 1a) on peut alors calculer ses coordonnées $x = 1, y = 0$: vérifier que ces coordonnées sont cohérentes avec l'équation donnée ci-dessus pour $z = f(x, y)$.

On veut trouver l'équation du plan tangent \mathbf{P} à l'endroit où est le skieur.

- On veut trouver la « ligne de plus grande pente » à l'endroit où est le skieur. Quelle est sa direction ? (raisonnez dans le plan \mathbf{P} en faisant un dessin).
- Donnez l'équation du profil du relief de la presqu'île passant par le skieur $(1, 0, 13/6)$, et dirigé vers le nord.
- Donnez un vecteur directeur de la ligne de plus grande pente, puis l'équation de \mathbf{P} .

Cet exercice ne sera pas corrigé.

Exercice 4 Si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable au point $a \in U$, et si $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, la fonction f admet-elle une dérivée partielle au point a dans la direction de \vec{v} ? Si oui, donner son expression en fonction de df_a .

b) Donner des exemples d'applications f ayant des dérivées partielles dans toutes les directions $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ au point a mais pas différentiables au point a .

a) Le résultat classique du cours est que f est différentiable en a ssi ses dérivées partielles dans les directions des axes sont définies au voisinage de a et continues en a . Si f est différentiable en a , il est immédiat de vérifier que $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a)$ est bien définie et vaut $df_a \cdot \vec{v}$.

b) Un contre exemple (vu dans Avez, à vérifier) $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. On vérifie alors que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Si f était différentiable, sa différentielle devrait vérifier $df_{(0,0)} = 0$. Or, par exemple, si $\vec{h} = (h, h)$, $f(\vec{h}) = \frac{|h|}{\sqrt{2}} \neq o(\|\vec{h}\|)$. On peut aussi vérifier que si $\vec{v} = (1, t)$, $f((0, 0) + \lambda \vec{v}) - f(0, 0) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \text{signe}(\lambda)$. Autrement dit la dérivée partielle dans la direction de \vec{v} n'est pas définie.

On peut modifier cet exemple en considérant $|f|(x, y) = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}$; alors la dérivée partielle de $|f|$ dans la direction de $\vec{v} = (1, t)$ est bien définie et vaut $\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$. mais $|f|$ n'est pas différentiable en $(0, 0)$ pour la même raison que f .

Un autre exemple: $g(x, y) = 0$ si $|x| > y^2$, $g(0, 0) = 0$ et $g(x, y) = y(1 - \frac{|x|}{y^2})$ sinon. On vérifie que les dérivées partielles de g dans toutes les directions non verticales sont nulles (faire un dessin de l'ensemble dans lequel g est non identiquement nulle!). On a $\frac{\partial g}{\partial x_2}(0, 0) = 1$. Si g était différentiable en $(0, 0)$ on aurait $dg_{(0,0)} = dy$. Si $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ avec $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, cela donnerait $\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0, 0) = \beta \neq 0$, d'où contradiction!

Autre exemple donné en TD: $f(x, y) = y^2/x$ si $x \neq 0$ et 0 sinon. $f(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}) = 1$ ne tend pas vers 0. f pas continue donc pas différentiable.

Exercice 5 (Applications linéaires, bilinéaires) a) Soit $\varphi : E \rightarrow F$ une application linéaire. Calculer sa différentielle au point $x \in E$.

b) Soit $\psi : E \times E \rightarrow F$ une application bilinéaire. Même question.

c) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Calculer la différentielle en $u \in \mathbb{R}^n$ de $v \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle Av, v \rangle$?

d) Même question avec u fixé et l'application $A \mapsto \langle Au, u \rangle$.

- a) $d\varphi_a = \varphi$. b) $d\psi_a = \psi(a, \cdot) + \psi(\cdot, a)$.
 c) La différentielle est $v \mapsto \langle Av, u \rangle + \langle Au, v \rangle$ d'après ce qui précède (application bilinéaire).
 d) C'est une application linéaire, de différentielle en A_0 l'application $A \mapsto \langle Au, u \rangle$.

Exercice 6 (Application holomorphe) Soit $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe, et $z_0 \in U$. Quelle propriété vérifie sa différentielle au point z_0 , vue comme application linéaire $df_{z_0} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

On identifie naturellement \mathbb{C} et \mathbb{R}^2 . Soit $z_0 = x_0 + iy_0$. La dérivée $f'(z_0)$ au sens complexe est un nombre complexe: $f'(z_0) = \alpha + i\beta$. On vérifie que la matrice de $df_{(x_0, y_0)}$ est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$. C'est la matrice d'une similitude (homothétie composée avec rotation), soit encore d'une application conforme (qui préserve les angles).

Exercice 7 (Projection stéréographique) Étudier l'application $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{\text{pole nord}\}$ définie par

$$P : (u, v) \mapsto \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2} \right)$$

(différentiabilité, calcul de la différentielle et des dérivées partielles, image, inversibilité, calcul de l'inverse, ...)

Vite, un dessin!! Il est immédiat de vérifier que P est définie sur \mathbb{R}^2 , C^∞ , et à valeurs dans S^2 . Pour montrer que c'est un C^∞ difféo de \mathbb{R}^2 dans $S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$, comprenons d'abord comment P est obtenue.

Identifions (u, v) avec $(u, v, 0) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$. Traçons la droite passant par $(u, v, 0)$ et $(0, 0, 1)$. Un exercice élémentaire montre que le deuxième point d'intersection M de cette droite avec la sphère est exactement $P(u, v)$. (écrire par exemple que $M \in S^2$ et \vec{MN} est colinéaire à $(-u, -v, 1)$.) Ceci nous permet aisément de voir que P est bijective, d'inverse $P^{-1} : (\alpha, \beta, \gamma) \in S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \mapsto \left(\frac{\alpha}{1-\gamma}, \frac{\beta}{1-\gamma} \right) \in \mathbb{R}^2$. Ces deux applications sont manifestement C^∞ sur leur domaine de définition. La projection stéréographique est donc un C^∞ -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 sur $S^2 \setminus \{N\}$. Sa différentielle a pour matrice jacobienne

$$JacP(u, v) = \begin{pmatrix} 2 \frac{(1-u^2+v^2)}{(1+u^2+v^2)^2} & \frac{-4uv}{(1+u^2+v^2)^2} \\ \frac{-4uv}{(1+u^2+v^2)^2} & 2 \frac{(1+u^2-v^2)}{(1+u^2+v^2)^2} \\ \frac{4u}{(1+u^2+v^2)^2} & \frac{4v}{(1+u^2+v^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Remarque: formellement P est C^∞ et bijective de \mathbb{R}^2 sur son image, mais son image n'est pas un ouvert de \mathbb{R}^n , on ne peut pas parler de difféomorphisme au sens classique du calcul différentiel. C'est ici que la géométrie différentielle intervient. L'image $P(\mathbb{R}^2)$ est une sous-variété C^∞ de \mathbb{R}^3 (cf exo 14-15). Et on sait définir la notion de difféomorphisme C^∞ entre deux sous-variétés C^∞ .

Exercice 8 (Coordonnées polaires) a) Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (\varphi_1(r, \theta), \varphi_2(r, \theta))$. Est-elle différentiable? Injective? Surjective? Sur quel(s) ensemble de définition peut-on l'étudier pour améliorer tout cela? (Faire un dessin).

b) Calculer sa jacobienne, son jacobien. Comment l'inverser? Calculer son (ses?) inverse(s) éventuel(s).

c) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 , et $\tilde{f} = f \circ \varphi$. Exprimer $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy$ en coordonnées polaires.

d) Application: $f(x, y) = e^{-x^2/2 - y^2/2}$. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx$.

e) **(Question très pénible à savoir faire)** Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^2 , et $\tilde{f} = f \circ \varphi$. Comment relier $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta)$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r, \theta)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(r, \theta))$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(r, \theta))$? Exprimer $(\Delta f)(\varphi(r, \theta))$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta)$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r, \theta)$. (On rappelle que $\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$.)

a) φ est bien sûr C^∞ , mais pas du tout bijective! $\varphi(r, \theta + 2\pi) = \varphi(r, \theta)$, $\varphi(-r, \theta + \pi) = \varphi(r, \theta)$, et $\varphi(0, \theta) = (0, 0)$ pour tout θ . Elle est surjective: si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $y > 0$, alors $(x, y) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2}, \arccos(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}))$. Si $y < 0$, $(x, y) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2}, -\arccos(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}))$, et si $y = 0$, par exemple, $(x, y) = \varphi(x, 0)$.

Pour « rendre » φ bijective, l'usage est de considérer sa restriction (toujours notée φ) à certains sous ensembles de \mathbb{R}^2 . Par exemple $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est bijective, mais aussi $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 0, x \geq 0\}$; dans la suite nous considérerons plutôt $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 0, x \leq 0\}$.

b) $Jac(\varphi)(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$. On en déduit que le jacobien $J(\varphi)(r, \theta)$ vaut r , et est non nul dès que $r \neq 0$. Un inverse possible de φ a été calculé en a).

c) La formule du changement de variable donne

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y), y=0, x \leq 0\}} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[} f \circ \varphi(r, \theta) |J(\varphi)(r, \theta)| dr d\theta$$

d) En appliquant la formule du changement de variables, on trouve

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2/2 - y^2/2} dx dy = 2\pi \int_{\mathbb{R}_+^*} r e^{-r^2/2} dr = 2\pi$$

Le terme de gauche est encore égal (Fubini!) à $(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx)^2$. L'intégrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx$ vaut donc $\sqrt{2\pi}$.

e) Notons $\tilde{f} = f \circ \varphi$. En calculant $\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2}$ et $\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2}$, on vérifie que

$$(\Delta f)(\varphi(r, \theta)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\varphi(r, \theta)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\varphi(r, \theta)) = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta).$$

Exercice 9 (Coordonnées sphériques) Mêmes questions avec $\Psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\Psi(r, \theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$. Quel est le nom usuel des paramètres θ et φ ? (Faire un dessin)

Les paramètres θ et φ sont appelés latitude et longitude. L'application Ψ est C^∞ mais pas du tout bijective. On vérifie qu'elle est bijective de $\mathbb{R}_+^* \times]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ sur son image $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = 0, y \geq 0\}$.

Son Jacobien vaut $J\Psi(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin \theta$.

La formule du changement de variables donne

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\mathbb{R}_+^* \times]0, \pi[\times]0, 2\pi[} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

Avec les mêmes notations qu'à l'exercice précédent, et par la même méthode (calculatoire et fastidieuse, mais facile) on trouve

$$\begin{aligned} \Delta f(\Psi(r, \theta, \varphi)) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Psi(r, \theta, \varphi)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\Psi(r, \theta, \varphi)) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\Psi(r, \theta, \varphi)) \\ &= \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2}(r, \theta, \varphi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2}(r, \theta, \varphi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi^2}(r, \theta, \varphi) + \frac{2}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta, \varphi) + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r, \theta, \varphi) \end{aligned}$$

Exercice 10 (Différentielle du déterminant) On considère l'application $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in M_n(\mathbb{R})$. Calculer la différentielle de $\det D \det_a$ au point a . (Exo classique, se trouve dans la littérature.)

Lorsque A est inversible, on constate que $\det(A + H) - \det A = \det A (\det(Id + A^{-1}H) - 1)$, d'où l'on déduit que $d(\det)_A.H = \det A \times d(\det)_{Id}(A^{-1}H)$. Il suffit donc de calculer la différentielle $d(\det)_{Id}$ en l'identité.

Un bon réflexe est de faire le calcul explicite en dimension 2. Prenons $H = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{pmatrix}$. Un calcul élémentaire donne $\det(Id + H) = 1 + Tr(H) + \det H$. Or $|\det H| \leq \|H\|_\infty^2 = o(\|H\|)$. Donc $d \det_{Id} = Tr$.

En dimension n quelconque, cela reste vrai. Pour le voir calculons $\det(Id + H)$. Soit a_{ij} le coefficient i, j de cette matrice. $a_{ij} = h_{ij}$ si $i \neq j$ et $a_{ii} = 1 + a_{ii}$.

$$\det(I + H) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i}$$

Pour chaque permutation $\sigma \neq id$, il existe $i_1 \neq i_2$ avec $\sigma(i_1) \neq i_1$ et $\sigma(i_2) \neq i_2$. Donc $a_{\sigma(i_1), i_1} a_{\sigma(i_2), i_2} = h_{i_1} h_{i_2}$ et le produit $\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i}$ est de degré au moins 2, donc c'est un $o(\|H\|_\infty)$. Reste le terme de la somme correspondant à $\sigma = id$, égal à $\prod_{i=1}^n (1 + h_i)$. Là encore, quand on développe, tous les termes sont de degré au moins deux en les h_i , sauf $1 + \sum_{i=1}^n h_i$. On obtient bien $\det(Id + H) = 1 + Tr(H) + o(\|H\|_\infty)$.

Puis si A est inversible, on en déduit

$$d \det_A.H = \det(A).Tr(A^{-1}H) = Tr({}^t Com(A)H).$$

Remarque: lorsque A est inversible, un calcul direct donne $\det(A + \lambda E_{ij}) - \det(A) = \lambda Tr({}^t Com(A).E_{ij})$, de sorte que les dérivées partielles valent $\frac{\partial \det}{\partial E_{ij}}(A) = Tr({}^t Com(A).E_{ij})$, et que l'on retrouve la formule précédente.

Cette expression a un sens même lorsque A n'est pas inversible. On aimerait donc pouvoir étendre cette formule à toutes les matrices de $M_n(\mathbb{R})$. Rappelons que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$. (En effet, considérer le polynôme $t \in \mathbb{R} \mapsto \det(t.Id + (1-t)A)$ pour $A \notin GL_n(\mathbb{R})$. Ce polynôme vaut 1 en $t = 1$, 0 en $t = 0$, donc il n'est pas identiquement nul, donc ses zéros sont isolés. Donc il existe une suite de matrices A_n inversibles, convergeant vers A .)

On a donc envie d'écrire

$$\det(A + H) - \det A = \lim_{n \rightarrow \infty} (\det(A_n + H) - \det A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (Tr({}^t Com(A_n).H) + o(\|H\|)) = Tr({}^t Com A.H) + ???$$

Le problème dans le calcul ci-dessus est que les termes en $(\|H\|)$ sont difficiles à contrôler en fonction de n .

Il y a alors plusieurs possibilités. On peut invoquer des arguments algébriques. L'application \det est C^∞ , car polynomiale. Les matrices inversibles formant un ouvert dense de l'ensemble des matrices $n \times n$, ceci permet d'étendre la relation $d \det_A.H = Tr({}^t Com(A).H)$ à tout $M_n(\mathbb{R})$.

Il est également instructif de calculer à la main les dérivées partielles. Si $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ désigne la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$, on calcule $\det(A + h.E_{ij}) - \det A$. Une manipulation élémentaire sur les lignes ou les colonnes de la matrice $A + h.E_{ij}$ donne $\det(A + h.E_{ij}) - \det A = (Com(A))_{ij}$. (Notez l'égalité, sans terme en $o(\|H\|)$, avec $H = hE_{ij}$. On a donc $\frac{\partial \det}{\partial E_{ij}}(A) = (Com(A))_{ij}$. On en déduit, pour une matrice $H = (h_{ij})$ quelconque,

$$D \det_A.H = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (Com A)_{ij}.h_{ij} = \sum_{j=1}^n ({}^t Com(A).H)_{jj} = Tr({}^t Com A.H)$$

Exercice 11 Montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $A \rightarrow A^{-1}$ est différentiable et calculer sa différentielle au point a .

L'application \det est continue. L'ensemble $\{A \in M_n(\mathbb{R}), \det(A) = 0\} = \det^{-1}(\{0\})$ est donc un fermé. Son complémentaire $GL_n(\mathbb{R})$ est donc ouvert.

Notons $Inv : A \rightarrow A^{-1}$ l'application passage à l'inverse définie sur $GL_n(\mathbb{R})$.

Remarquons d'abord que $Inv(A+H) - Inv(A) = A^{-1}(Inv(Id+HA^{-1}) - Id)$. Il suffit donc de connaître la différentielle de Inv en Id . Munissons $M_n(\mathbb{R})$ d'une norme matricielle. C'est alors un evn complet. Donc $Inv(Id+X) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k X^k$. On en déduit que $Inv(Id+HA^{-1}) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k (HA^{-1})^k$, puis que $d(Inv)_A.H = A^{-1}.(-HA^{-1}) = -A^{-1}HA^{-1}$.

Ceci pouvait se démontrer coordonnée par coordonnée en calculant $\frac{\partial Inv}{\partial x_{ij}}(Id) = -E_{ij}$, d'où $dInv_{Id}.M = -M$.

Exercice 12 (Théorème d'inversion locale) Énoncer le théorème d'inversion locale. Comment l'illustrer? Exemples, applications?

voir cours

Commentons tout de même. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Soit $a \neq 0$. Alors $f'(a) = 2a \neq 0$ d'où $df_a : h \mapsto 2ah$ est inversible. Il existe donc $V \ni a$ dans \mathbb{R} , tq la restriction de f à V soit un C^∞ -difféomorphisme sur son image. Si $a > 0$, $V = \mathbb{R}_+^*$ convient très bien. Pourtant, f n'est pas bijective bien sûr, ce résultat est purement local!

Rappelons que plus généralement, si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application de classe C^k , $k \geq 1$, et $a \in U$ tq df_a est inversible, alors il existe $V \ni a$, $V \subset U$, V ouvert, tq $f|_V : V \rightarrow f(V)$ soit un C^1 -difféomorphisme local.

Rappelons pour finir que ce théorème se démontre en considérant par exemple l'application à y fixé $F(x) = x - df_a^{-1}.(f(x) - y)$ et en utilisant des arguments de point fixe.

Des applications, nous en verrons au fil des exos. On peut par exemple montrer de jolis résultats d'algèbre, comme la simplicité de SO_n ou le théorème d'Alembert sur le fait que \mathbb{C} est algébriquement clos. cf Gonnord Tosel par exemple.

Exercice 13 (Théorème des fonctions implicites) a) Énoncé, exemples, applications.

b) Soit $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Illustrez le théorème des fonctions implicites. Géométriquement, que signifient ses hypothèse(s) et conclusion(s).

a) Voir cours pour l'énoncé.

b) Soit $(x_0, y_0) \in S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 0\}$. L'application $y \mapsto f(x_0, y)$ a pour dérivée $2y$. Si $y_0 \neq 0$, alors l'application $y \mapsto f(x_0, y)$ a une différentielle inversible en y_0 . Le TFI s'applique, et dit qu'il existe un voisinage U de x_0 , un voisinage V de y_0 et une application φ de classe C^∞ de U dans V , avec $\varphi(x_0) = y_0$, tq l'ensemble des $(x, y) \in U \times V$ tq $f(x, y) = 0$ est exactement le graphe de l'application $x \mapsto \varphi(x)$, i.e. l'ensemble des couples $(x, \varphi(x)), x \in U$.

Ceci se voit bien sur le dessin! L'ensemble $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 0\}$ est le cercle unité. A part aux points $(\pm 1, 0)$, localement, le cercle est un graphe. Prendre $U =]-1, 1[$, $V =]0, 1[$ et $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$ ou $U =]-1, 1[$, $V =]0, 1[$ et $\varphi(x) = -\sqrt{1-x^2}$, pour voir localement les morceaux de cercle comme graphes de fonctions.

L'hypothèse différentielle inversible du TFI revient à dire que, comme dans l'ex ci dessus, l'ensemble $F(x, y) = 0$ n'est pas "vertical" au voisinage de (x_0, y_0) . La conclusion est que localement cet ensemble est un graphe.

Exercice 14 (Surfaces) a) Donner différentes définitions d'une surface (sous-variété de dimension 2) de \mathbb{R}^3 comme

* ensemble des zéros d'une submersion $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

* localement l'image d'un plongement $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

* localement le graphe d'une application $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

* ensemble localement modelé sur \mathbb{R}^2 : chaque point de S a un voisinage difféomorphe à $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$.

Ces points méritent d'être précisés (hypothèses), complétés, et l'équivalence entre eux doit être démontrée.

b) Comparer avec la définition de nappe paramétrée de \mathbb{R}^3 . Pouvez-vous donner un exemple de nappe paramétrée qui ne soit pas une surface (au sens de sous variété de dimension 2 de \mathbb{R}^3) ? Ou de surface qui ne soit pas une nappe paramétrée?

c) Illustrer chacune de ces définitions de surface avec la sphère unité de \mathbb{R}^3 . (On écrira explicitement chacune des définitions montrant que la sphère est une surface de \mathbb{R}^3). Peut-on l'écrire comme nappe paramétrée ?

c) Même question avec l'hyperboloïde à deux nappes $z^2 - x^2 - y^2 = 1$, l'hyperboloïde à une nappe $z^2 - x^2 - y^2 = -1$, le cylindre $x^2 + y^2 = 1$; et toutes vos quadriques préférées.

d) Même question avec le tore paramétré par $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi[\mapsto ((R+r \cos \varphi) \cos \theta, (R+r \cos \varphi) \sin \theta, r \sin \varphi)$.

NB: Cet exo avait été posé avant la réintroduction de la leçon intitulée « sous-variétés de \mathbb{R}^n ». Il est bien évident que tout ceci se généralise immédiatement en dimension plus grande, comme cela a été fait en TD.

a) Voir Berger-Gostiaux

b) Une nappe paramétrée C^k est une application N de classe C^k d'un ouvert U de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 , tq la différentielle de N en tout point $(u, v) \in U$ est injective. Ceci implique que N est localement injective: pour tout $(u, v) \in U$ il existe un voisinage \mathcal{U} de (u, v) tq la restriction de N à \mathcal{U} est injective. Mais N n'est pas forcément injective. Son image $N(U)$ n'est donc pas forcément une sous-variété de \mathbb{R}^3 . Par exemple, $N : (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (t(t^2 - 4), e^{-t^2}, s)$ est une nappe paramétrée mais son image $N(\mathbb{R}^2)$ n'est pas une sous variété de \mathbb{R}^3 . Car pour tout $s \in \mathbb{R}$, $N(s, -2) = N(s, 2)$. Le long de cette droite $(N(s, \pm 2))_{s \in \mathbb{R}}$, l'image de la nappe paramétrée fait une "boucle", elle a deux plans tangents. Elle n'est donc pas localement modelé sur \mathbb{R}^2 .

Attention au sens de 'localement'. Pour une nappe paramétrée on parle de localement dans l'espace des paramètres de départ, pour une sous-variété, on parle de localement au voisinage de chaque point de la surface.

c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

* Définition: ensemble localement modelé sur $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Localement autour d'un point $(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 1)$ de la sphère, on peut trouver un ouvert U de \mathbb{R}^3 tq l'application (construite à partir de la projection stéréographique inverse) $\varphi(x, y, z) \mapsto (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 1 - x^2 - y^2 - z^2)$ soit un difféomorphisme de U sur $\varphi(U)$, et telle que $U \cap S = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^2 \times \{0\})$.

Il y a plein d'autres possibilités. Par exemple, localement autour d'un point (x_0, y_0, z_0) de la sphère tel que $z_0 > 0$, on peut trouver un ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$ tq l'application $(x, y, z) \in U \mapsto (x, y, 1 - x^2 - y^2 - z^2)$ est un difféomorphisme de U sur $\varphi(U)$ avec $U \cap S = \varphi^{-1}((\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cap \varphi(U))$.

* c'est l'ensemble des zéros de la submersion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1$.

* localement, autour d'un point (x_0, y_0, z_0) tq $z_0 > 0$, $S \cap (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*)$ est l'image du plongement $(x, y) \mapsto (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$.

Si $z_0 < 0$, c'est l'image du plongement $(x, y) \mapsto (x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2})$. Si $z_0 = 0$, x_0 ou y_0 est non nul, on considère un plongement du type $(y, z) \mapsto (\pm\sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z)$ ou bien $(x, z) \mapsto (x, \pm\sqrt{1 - x^2 - z^2}, z)$.

* localement si $z_0 > 0$, S est (autour de (x_0, y_0, z_0) tq $z_0 > 0$) le graphe de l'application $(x, y) \in D(0, 1) \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Les autres cas se traitent comme précédemment.

* La sphère est l'image de la nappe paramétrée $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$. Cette nappe n'est absolument pas injective!

c-bis) Pour l'hyperboloïde à deux nappes, je considère $\mathcal{H}^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z^2 - x^2 - y^2 = 1 \text{ et } z > 0\}$.

* Il existe un voisinage ouvert U de \mathcal{H}^+ tq l'application $(x, y, z) \in U \mapsto (x, y, 1 + x^2 + y^2 - z^2) \in \mathbb{R}^3$ soit un difféomorphisme de U sur son image, avec $U \cap \mathcal{H}^+ = \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap \mathbb{R}^2 \times \{0\})$.

* \mathcal{H}^+ est l'ensemble des zéros de la submersion $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^* \mapsto z^2 - x^2 - y^2 - 1$.

* C'est l'image du plongement global $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x, y, \sqrt{x^2 + y^2 + 1})$. C'est donc en particulier l'image d'une nappe paramétrée. Ce plongement est également un difféomorphisme global de \mathbb{R}^2 sur \mathcal{H}^+ .

C'est le graphe de l'application $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$.

Pour l'hyperboloïde à une nappe $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$, ou le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 1$, ainsi que pour les autres quadriques, définies par des équations polynomiales, les raisonnements sont similaires.

d) Tore paramétré. Par construction, c'est l'image d'une nappe paramétrée. C'est donc facile de trouver un voisinage de chaque point du tore sur lequel le tore est localement l'image d'un plongement. **Corrigé à compléter pour l'an prochain...**

Exercice 15 (Espaces tangents) L'espace tangent en $x \in S$ à la surface est par définition le plan affine de \mathbb{R}^3 passant par x et de direction l'ensemble $\{c'(0), c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S \text{ courbe } C^1\}$ (ici ε dépend de c . Il s'agit de courbes définies au voisinage de 0).

a) Pour chacune des définitions équivalentes de surfaces, préciser comment on trouve l'espace tangent en un point $x \in S$. (Il suffit de raisonner localement au voisinage de x .)

b) Dans chacun des exemples des question c-d) de l'exercice 14, calculer l'espace tangent en un point quelconque de la surface.

NB: En pratique, l'espace tangent est souvent plutôt défini comme un espace vectoriel, mais pensé intuitivement comme un espace affine, tangent en a à la surface. En cas de doute, on parle d'espace vectoriel tangent, et d'espace affine tangent.

a) Si $S \subset \mathbb{R}^3$ est une surface de \mathbb{R}^3 , elle est localement modelée sur \mathbb{R}^2 . Soit $a \in S$. Il existe un ouvert U de \mathbb{R}^3 contenant a et un difféomorphisme $h : U \rightarrow h(U) \subset \mathbb{R}^3$ tq $U \cap S = h^{-1}(h(U) \cap \mathbb{R}^2 \times \{0\})$. On peut supposer que $h(a) = 0$ (Pourquoi? est-ce clair pour vous?).

L'espace tangent $T_a S$ est l'ensemble $\{c'(0), c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S \text{ courbe } C^1\}$. Soit c une telle courbe. Alors $h \circ c$ est une courbe de $]-\varepsilon, \varepsilon[$ dans $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$. En particulier, sa dérivée en 0, $(h \circ c)'(0) = dh_a \circ c'(0)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$. On en déduit que $c'(0) \in (dh_a)^{-1}(\mathbb{R}^2 \times \{0\})$, soit encore $T_a S \subset (dh_a)^{-1}(\mathbb{R}^2 \times \{0\})$. Il y a en fait égalité; en effet, si $v \in (dh_a)^{-1}(\mathbb{R}^2 \times \{0\})$, notons $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S$ la courbe définie par $c(t) = h^{-1}(dh_a(tv))$. Alors $c'(0) = v$ et $c(0) = a$. (Ici ε est choisi de sorte que $dh_a(tv)$ reste bien dans $h(U)$.) En particulier, $T_a S$ est un espace vectoriel et plus précisément,

$$T_a S = dh_a^{-1}(\mathbb{R}^2 \times \{0\}).$$

Si S est une surface de \mathbb{R}^3 , localement au voisinage de a , elle peut être écrite comme noyau d'une submersion. Autrement dit, il existe U voisinage de a dans \mathbb{R}^3 et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ submersion tq $U \cap S = f^{-1}(0)$. Si $a \in S$, $f(a) = 0$, et $T_a S = \text{Ker } df_a$. En effet, si c est une courbe tracée sur S , alors $f \circ c$ est identiquement nulle, d'où $(f \circ c)' \equiv 0$ soit encore $df_a \circ c'(0) = 0$. On en déduit $T_a S \subset \text{Ker } df_a$. Un argument de dimension permet de conclure à l'égalité.

Si S est une surface de \mathbb{R}^3 , localement il existe U voisinage de a dans \mathbb{R}^3 sur lequel $S \cap U$ est le graphe d'une application $\varphi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui est une immersion injective. On peut toujours supposer que $a = \varphi(0)$. En particulier, si c est une courbe tracée sur S au voisinage de a , c s'écrit comme image par φ d'une courbe $\varphi^{-1} \circ c$ tracée dans l'ouvert V de \mathbb{R}^2 . On en déduit immédiatement que $c'(0) \in \text{Im } d\varphi_0$. Un argument de dimension permet de conclure que $T_a S = \text{Im } d\varphi_0$.

Si S est une surface de \mathbb{R}^3 , localement il existe V voisinage de a dans S et W voisinage de 0 dans \mathbb{R}^m , et $\psi : W \rightarrow V$ immersion injective (avec $\psi(0) = a$). Dans ce cas; comme ci-dessus, on a $T_a S = \text{Im } d\psi_0$.

Il reste à écrire tout cela explicitement dans les exemples. Sera complété l'an prochain.

Sur la sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, l'espace tangent en (x_0, y_0, z_0) est le plan d'équation $2x_0x + 2y_0y + 2z_0z = 0$. La façon la plus simple de l'obtenir est d'utiliser l'équation de la sphère et de la différentier, ie d'utiliser la définition d'une sous-variété comme localement le noyau d'une submersion.

Exercice 16 (Groupes de Lie) Pour nous, un *groupe de Lie linéaire* est un groupe de matrices qui pour un certain $k \in \mathbb{N}$ est inclus dans \mathbb{R}^k , qui en tant que sous-ensemble de \mathbb{R}^k est une sous-variété différentiable de \mathbb{R}^k , et tel que de plus les structures de groupe et de sous-variété sont compatibles, à savoir que la multiplication est une application différentiable de $G \times G \rightarrow G$, et l'inverse est un difféomorphisme de $G \rightarrow G$.

a) Vérifier que chacun des groupes suivants est un groupe de Lie et préciser sa dimension :

$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), \det A = 1\}$, $O(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), {}^tAA = Id\}$, $SO(n, \mathbb{R}) = O(n, \mathbb{R}) \cap SL(n, \mathbb{R})$, $SO(q) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), \det A = 1 \text{ et } {}^tABA = B\}$, avec q une forme quadratique sur \mathbb{R}^n , et B la matrice de la forme bilinéaire symétrique associée dans la base canonique, $SU(n, \mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}), {}^t\bar{A}A = Id\}$.

b) Soit M une sous-variété de \mathbb{R}^k , et $x \in M$. L'espace tangent en x à M est par définition l'ensemble $T_xM := \{c'(0), c :]-1, 1[\rightarrow M \subset \mathbb{R}^k \text{ courbe } C^1\}$. Pour chacun des groupes de Lie ci-dessus, préciser quel est son espace tangent en l'identité.

corrigé à compléter pour l'an prochain. La bonne référence classique d'agreg sur ce sujet est Mneimé Testard.

a) $SL_n(\mathbb{R})$ est le noyau de la submersion de $M_n(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} $A \mapsto \det(A) - 1$. C'est donc une sous-variété de dimension $n^2 - 1$ de \mathbb{R}^n . La multiplication est une application polynomiale de $M_n(\mathbb{R})$. Elle est donc C^∞ . L'inverse $A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^tCom(A)$ est une fraction rationnelle en les coefficients de A . Elle est donc C^∞ dès qu'elle est définie. En particulier, $SL_n(\mathbb{R})$ est un groupe de Lie.

Exercice 17 a) Soit S une sous-variété de dimension m de \mathbb{R}^n , et $a \in S$. Soit $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application C^1 définie sur un voisinage U de S , et $f = g|_S$. L'application linéaire tangente T_af est par définition la restriction de dg_a à l'espace tangent T_aS . Le point a est un point critique de f si $T_af = 0$, soit encore lorsque la restriction de dg_a à T_aS est nulle. Montrer que $a \in S$ est un point critique de f ssi $\nabla g(a)$ est orthogonal à T_aS . (On rappelle que $\nabla g(a)$ est défini comme l'unique vecteur de \mathbb{R}^n tel que pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, $\langle \nabla g(a), v \rangle = dg_a.v$.)

b) Un exemple célèbre. Soit $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique non dégénérée, et A la matrice symétrique (invertible) associée dans la base canonique. Vérifier que $\nabla q(x) = 2Ax$. Soit $\Sigma = q^{-1}(1)$. Vérifier que Σ est une hypersurface de \mathbb{R}^n . Soit $q_0(x) = \|x\|^2$ (norme euclidienne). Que vaut $\nabla q_0(x)$? Donner les équations satisfaites par les points critiques de q_0 restreinte à Σ . Que doit vérifier le multiplicateur de Lagrange? Discuter l'existence de points critiques de $(q_0)|_\Sigma$ en fonction des valeurs propres de A .

c) Soit $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une submersion. (Rappeler la définition). Soit S_g la surface définie par $S_g = \{x \in \mathbb{R}^3, g(x) = 0\}$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable. Comment trouver les extrema de la restriction $f|_{S_g}$ de f à S_g ? Justifier d'une part à l'aide du théorème des extrema liés, et d'autre part à l'aide de votre intuition géométrique, et d'un dessin.

d) On cherche à minimiser la surface S d'une canette cylindrique, tout en fixant son volume égal à $V = 33cl$. Résoudre le problème à l'aide du théorème des extrema liés.

d) On cherche à maximiser le volume inclus à l'intérieur d'une surface cylindrique de surface fixée S_0 . Même question.

corrigé à compléter pour l'an prochain.

Exercice 18 (Perturbation d'application) Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 , telle que $T(0) = 0$ et 0 n'est pas un point fixe dégénéré, i.e. 1 n'est pas une valeur propre de dT_0 .

a) Montrer qu'alors 0 est un point fixe isolé de T , i.e. il existe un voisinage de 0 sur lequel 0 est l'unique point fixe de T . Exemples?

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , et $T_\lambda := T + \lambda S$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ et U voisinage de 0 tels que pour tout $|\lambda| < \delta$, l'opérateur perturbé T_λ a un unique point fixe x_λ dans U . De plus, montrer que l'application $\lambda \in]-\delta, \delta[\mapsto x_\lambda$ est de classe C^1 . (on pourra considérer $f(\lambda, x) = T_\lambda(x) - x$.)

a) Notons d'abord $U(x) = T(x) - x$. T a un point fixe en x ssi $U(x) = 0$. La différentielle dU_0 vaut $dU_0 = dT_0 - Id$. dT_0 n'a pas 1 pour valeur propre, ce qui équivaut à dire que dU_0 est injective, donc inversible. On a de plus $U(x) = dU_0.x + o(\|x\|)$. Supposons qu'il existe $x_n \rightarrow 0$ tq $U(x_n) = 0$. Ceci implique (par définition d'un "petit o") que $\frac{\|dU_0.x_n\|}{\|x_n\|} = \left\| dU_0 \cdot \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\| \rightarrow 0$. Or $\frac{x_n}{\|x_n\|}$ appartient à la sphère unité S^{n-1} de \mathbb{R}^n qui est compacte. Quitte à extraire, on peut supposer $x_n/\|x_n\| \rightarrow u \in S^{n-1}$. On a donc trouvé $u \neq 0$ tq $dU_0.u = 0$. Contradiction avec l'hypothèse.

b) Notons $f(\lambda, x) = T_\lambda(x) - x$. On applique le théorème des fonctions implicites. L'application $x \mapsto f(\lambda, x)$ est C^1 à λ fixé, et sa différentielle en $x_0 = 0$ vaut $dT_\lambda - Id$. Lorsque $\lambda = 0$, cette différentielle est inversible. Le TFI assure qu'il existe un voisinage U de 0 dans \mathbb{R} , un voisinage V de 0 dans \mathbb{R}^n et $\varphi : U \rightarrow V$, $\lambda \mapsto \varphi(\lambda) = x_\lambda$, de classe C^1 , avec $\varphi(0) = 0$, telle que les couples $(\lambda, x) \in U \times V$ vérifiant $f(\lambda, x) = 0$ sont tous de la forme (λ, x_λ) . C'est exactement le résultat voulu.

Exercice 19 (Continuité des racines d'un polynôme) Soit $P_0(X) = X^3 + a_0X^2 + b_0X + c_0$ un polynôme, et x_0 une racine de P_0 telle que $P'_0(x_0) \neq 0$. Montrer que si (a, b, c) est assez proche de (a_0, b_0, c_0) alors $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ a une unique racine proche de x_0 .

C'est, comme à l'exercice précédent, une application littérale du TFI. Considérons l'application $F : (a, b, c, x) \mapsto X^3 + aX^2 + bX + c$. C'est une application C^∞ , et à (a_0, b_0, c_0) fixés, l'application $x \mapsto F(a_0, b_0, c_0, x) = P_0(x)$ a pour dérivée P'_0 . En particulier, sa différentielle en x_0 est l'application linéaire inversible $h \mapsto P'_0(x_0).h$. Le théorème des fonctions implicites nous assure qu'il existe un voisinage V de (a_0, b_0, c_0) et un voisinage W de x_0 et un C^∞ -difféomorphisme local $\psi : V \rightarrow W$ tels que $(a, b, c, x) \in V \times W$ et $F(a, b, c, x) = 0$ ssi $x = \psi(a, b, c)$. Autrement dit, si $(a, b, c) \in V$, le polynôme $P_{(a,b,c)}$ a une unique racine proche de x_0 , et cette racine varie de façon C^∞ avec (a, b, c) .

Exercice 20 (Lagrangien) Soit $E = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \ C^1\}$. C'est un espace vectoriel de dimension infinie, que l'on munit de sa norme C^1 : $\|\gamma\|_{C^1} = \|\gamma(0)\| + \sup_{t \in [0,1]} \|\gamma'(t)\|$. Soit $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^k . Soit $\mathcal{L} : E \rightarrow \mathbb{R}$ le *Lagrangien*, défini par $\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^1 L(\gamma(t), \gamma'(t)) dt$. Montrer qu'elle est de classe C^k .

Calculons, pour γ, h dans E , vec $h(0) = 0$, la différence

$$\mathcal{L}(\gamma + h) - \mathcal{L}(\gamma) = \int_0^1 dL_{(\gamma(t), \gamma'(t))}(h(t), h'(t)) dt + \int_0^1 (|h(t)| + |h'(t)|)\varepsilon(1) dt$$

On voudrait identifier la première intégrale de droite comme la différentielle de \mathcal{L} au point γ évaluée en h . Pour cela, il faut vérifier qu'elle est linéaire en h , ce qui est évident, mais également continue. Et il faut aussi vérifier que la deuxième intégrale est un $o(\|h\|)$.

On majore l'intégrale $\left| \int_0^1 dL_{(\gamma(t), \gamma'(t))}(h(t), h'(t)) dt \right|$ par

$$\int_0^1 |dL_{(\gamma(t), \gamma'(t))} \cdot (h(t), h'(t))| dt \leq \int_0^1 \|dL_{(\gamma(t), \gamma'(t))}\| \times \max(|h(t)|, |h'(t)|) dt.$$

L'application $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mapsto dL_{(a,b)}$ est continue, donc uniformément continue sur le compact $K = \{(\gamma(t), \gamma'(t)), t \in [0, 1]\}$. Elle est donc bornée uniformément sur ce compact par une constante C_γ .

D'autre part, la quantité $\max(|h(t)|, |h'(t)|)$ est majorée par $\|h\|_{C^1}$. Donc

$$\left| \int_0^1 dL_{(\gamma(t), \gamma'(t))}(h(t), h'(t)) dt \right| \leq C_\gamma \|h\|_{C^1}$$

L'application qu'on souhaite identifier comme la différentielle de \mathcal{L} au point γ est donc linéaire continue.

Par ailleurs, le terme $\int_0^1 (|h(t)| + |h'(t)|)\varepsilon(1) dt$ vérifie $\int_0^1 (|h(t)| + |h'(t)|)\varepsilon(1) dt \leq \|h\|_{C^1} \int_0^1 \varepsilon(1) dt$. Le terme en $\varepsilon(1)$ dépend de t a priori, mais tend vers 0 lorsque $\|h\|_{C^1}$ tend vers 0. Le théorème de convergence dominée assure que l'intégrale tend aussi vers 0.

Autrement dit, nous avons bien démontré que l'application \mathcal{L} est différentiable et que sa différentielle est $d\mathcal{L}_\gamma.h = \int_0^1 dL_{(\gamma(t), \gamma'(t))}(h(t), h'(t)) dt$.

Si vous préférez, voici un argument bien plus rapide, qui camoufle les problèmes.

Notons F l'ensemble des chemins continus de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . C'est un espace vectoriel de dimension infinie, que l'on munit de sa norme C^0 $\|\gamma\|_{C^0} = \sup_{t \in [0,1]} \|\gamma(t)\|$. L'application \mathcal{L} est la composée de l'application linéaire continue, donc C^∞ , $\gamma \in E \mapsto (\gamma, \gamma') \in E \times F$, puis de l'application de classe C^k $(\gamma_1, \gamma_2) \in E \times F \mapsto L(\gamma_1, \gamma_2)$, et de l'application « intégrale » $u \in F \mapsto \int_0^1 u(t) dt$, qui est linéaire continue, donc C^∞ .

Donc \mathcal{L} est C^k d'après le théorème de dérivation des fonctions composées. Et sa différentielle vaut $d\mathcal{L}_\gamma(h) = \int_0^1 dL_{(\gamma(t), \gamma'(t))}(h(t), h'(t)) dt$.

Exercice 21 (Encore de la méca) Soit $B = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ la boule ouverte unité, et $\mathcal{F} = \{u : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^2 \text{ à support compact}\}$. On définit l'énergie

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_B \|\nabla u(x)\|^2 dx - \int_B F \circ u(x) dx$$

où $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^1 bornée.

a) Calculer la différentielle de E au point $u_0 \in \mathcal{F}$. En déduire que les points critiques de E (i.e. tels que $dE_{u_0} = 0$) sont solutions d'une EDP. (On admettra la formule de Stokes $\int_B \nabla u \nabla \varphi dx = - \int_B \Delta u \varphi dx$)

b) Calculer la différentielle seconde de E .

a) Il va se poser les mêmes problèmes en dimension plus grande qu'à l'exercice précédent pour justifier la différentiabilité de E . Ce point est laissé aux étudiant-e-s.

On vérifie ensuite aisément que $dE_u.h = \int_B \langle \nabla u(x), \nabla h(x) \rangle dx - \int_B F'(u(x))h(x) dx$. Au passage, on voit que l'hypothèse pose problème, on a besoin de $F \ C^1$.

A l'aide de la formule de Stokes rappelée dans l'énoncé, on vérifie que $dE_u = 0$ ssi pour tout $h \in \mathcal{F}$, on a $dE_U.h = 0$, soit encore $\int_B (-\Delta u(x) - F'(u(x))) \cdot h(x) dx = 0$ pour tout $h \in \mathcal{F}$, soit encore $\Delta u + F' \circ u = 0$ sur B .

b) Avec les mêmes problèmes de continuité à vérifier, la différentielle seconde de E en u est l'application bilinéaire symétrique d^2E_u définie par $d^2E_u.(j, k) = \int_B \langle \nabla h(x), \nabla k(x) \rangle dx - \int_B F''(u(x))k(x)h(x) dx$.

corrigé à compléter pour l'an prochain.

Exercice 22 (Lemme de Schwarz) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application de classe C^2 . Montrer que l'application $d^2 f(a) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une application bilinéaire symétrique.

La démonstration se trouve dans Pommelet (avec beaucoup de fautes de frappe), ou dans Cartan probablement. C'est une application importante bien que fastidieuse de l'inégalité des accroissements finis.

Exercice 23 (Lemme de Morse) Soit f une fonction C^∞ à valeurs réelles définie au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$. Supposons que $df_0 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}$, et que $d^2 f_0$ est une forme quadratique non dégénérée.

Montrer qu'il existe un difféomorphisme $\varphi : U \rightarrow V$, avec U, V deux voisinages de 0 , tel que pour tout $x \in U \subset \mathbb{R}^n$, on ait

$$f \circ \varphi(x) = f(0) + \frac{1}{2} D^2 f(0)(x, x).$$

Commentaire Après changement de variable convenable, au voisinage de 0 , $f(x)$ ressemble à son développement de Taylor à l'ordre 2.

Exercice 24 Quelques compléments à connaître aussi : théorème du rang constant, théorème de Sard, étude des courbes planes et gauches, définition et étude des quadriques. Classification des formes quadratiques et étude locale des surfaces. Surface réglée. ...

corrigé à compléter pour l'an prochain.

Quelques autres idées en vrac:

Gonnord-Tosel:

* Simplicité de $SO(n)$

* différentiabilité d'une norme, d'une distance, de la distance à un fermé, d'une fonction convexe, d'une fonction lipschitzienne/monotone, ...

* Théorème de d'Alembert comme application du théorème d'inversion locale.

* théorème de Sard (version facile/version difficile)

* Immersions, submersions, rang constant (Rouvière)

* théorème d'Hadamard-Levy (Zuily-Queffelec)