

Actions de groupes

Définitions de base

Perrin, Cours d'Algèbre

Josette Calais, Eléments de théorie des groupes, chapitre 5

Exercice 1 Rappeler la définition d'une action (ou opération) d'un groupe sur un ensemble. Donner des exemples simples.

Qu'est-ce qu'une orbite? Un point fixe? Un stabilisateur? Centralisateur? Normalisateur? une action libre? Fidèle? Transitive? Sans point fixe?

De quelle(s) manière(s) classique(s) un groupe G agit-il sur lui-même?

Corrigé G agit sur X s'il existe une application $G \times X \rightarrow X$, $(g, x) \rightarrow g.x$ qui vérifie que $g.(g'.x) = (gg').x$ et $1.x = x$ pour tous $g, g' \in G$ et $x \in X$. Exemples: voir tout le devoir.

Orbite de x par G : c'est l'ensemble $G.x = \{g.x, g \in G\} \subset X$.

Un point fixe par l'action de G est un point x tq pour tout $g \in G$, $g.x = x$. Exemple: l'origine 0 pour l'action d'un groupe linéaire sur un espace vectoriel, ou le barycentre d'un polyèdre régulier pour l'action du groupe des isométries préservant le polyèdre.

Le stabilisateur de x est le sous-groupe $G_x = \{g \in G, g.x = x\} \subset G$ des éléments de G qui fixent x .

Les actions classiques de G sur lui-même sont les actions par translation à gauche $g.h = gh$, par translation à droite notée $h.g$ plutôt que $g.h$ parfois: $h.g = hg^{-1}$, par conjugaison $g.h = ghg^{-1}$.

Le centralisateur de g est le stabilisateur de g pour l'action par conjugaison de G sur lui-même: $H_g = \{h \in G, hgh^{-1} = g\}$.

Le normalisateur d'un sous-groupe H de G , $N_G(H)$, est le stabilisateur de H pour l'action de G par conjugaison sur l'ensemble de ses sous-groupes: $N_G(H) = \{g \in G, gHg^{-1} = H\}$.

Une action transitive est une action de G sur X tq pour tout $x \in X$, tout $y \in X$, il existe $g \in G$, tq $g.x = y$. L'action est fidèle si $g.x = x$ pour tout x implique $g = Id$, autrement dit G s'injecte dans le groupe des bijections de X .

Une action est libre si tous les stabilisateurs sont triviaux, i.e. aucun élément distinct de l'élément neutre n'a de point fixe (bien plus fort qu'une action fidèle).

Exercice 2 (Théorème de Cayley) Soit G un groupe fini de cardinal n . Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de \mathcal{S}_n .

Corrigé G agit sur lui-même par translation (à gauche ou à droite). L'application $x \in G \mapsto g.x$ est une bijection de G . Comme G a n éléments, cette bijection s'identifie clairement à un élément de \mathcal{S}_n , et G lui-même, dans cette identification, est naturellement isomorphe à un sous-groupe de \mathcal{S}_n .

Exercice 3 Soit une action de groupe $G \times X \rightarrow X$.

a) Soient g_1 et g_2 deux éléments de G qui sont conjugués (dans G). Montrer que les orbites de g_1 et g_2 sont en bijection. En particulier, montrer que g_1 et g_2 ont même nombre de points fixes, d'orbites périodiques, etc.

b) Considérons le groupe diédral \mathcal{D}_{2n} , $n \geq 3$, stabilisant le polygone régulier à n sommets $e^{2i\pi \frac{k}{n}}$, $0 \leq k \leq n-1$. Supposons que n est pair. Donner deux éléments de \mathcal{D}_{2n} qui ne sont pas conjugués dans \mathcal{D}_{2n} .

Donner un exemple de deux éléments de \mathcal{D}_{2n} qui sont conjugués en tant qu'éléments de $SO(2, \mathbb{R})$ mais pas dans \mathcal{D}_{2n} .

Corrigé a) Soit $x \in X$, et $\langle g_1 \rangle .x$ l'orbite de x . Soit $g_2 = gg_1g^{-1}$. Alors l'application $x' \in \langle g_1 \rangle .x \mapsto g.x' \in \langle g_2 \rangle .(g.x)$ est une bijection. En particulier, $g_1x = x$ ssi $g_2.x = x$, $g_1^n .x = x$ ssi $g_2^n .x = x$, $\langle g_1 \rangle .x$ est dense dans X ssi $\langle g_2 \rangle .x$ l'est, etc.

b) Une rotation différente de l'identité de \mathcal{D}_{2n} agissant sur le polygone (vu comme l'ensemble des sommets et arêtes) n'a pas de point fixe. Une symétrie de \mathcal{D}_{2n} a des points fixes (l'intersection du polygone avec son axe). Elles ne sont donc pas conjuguées dans \mathcal{D}_{2n} .

Soient σ_1 la symétrie d'axe Δ_1 une droite joignant deux sommets opposés du polygone, et σ_2 la symétrie d'axe Δ_2 une droite joignant les milieux de deux côtés opposés dans le polygone. Alors σ_1 et σ_2 sont conjuguées dans $O(2, \mathbb{R})$, par exemple par la rotation qui envoie Δ_1 sur Δ_2 (conjugaison à écrire dans le bon sens). Cependant, σ_1 et σ_2 ne sont pas conjuguées dans \mathcal{D}_{2n} . Sinon, il y aurait une isométrie du groupe \mathcal{D}_{2n} qui enverrait les sommets du polygone qui sont sur Δ_1 sur les milieux des arêtes de Δ_2 . Comme c'est une isométrie, c'est absurde!

Remarque Il y a ainsi une grande différence entre le groupe diédral \mathcal{D}_{2n} quand n est pair, et n est impair. Quand n est pair, il y a deux classes de conjugaison distinctes de réflexions (celles de σ_1 et σ_2). Quand n est impair, il n'y en a qu'une (car tous les axes de symétrie passent par un sommet et le milieu du sommet opposé).

Exercice 4 Soit G un groupe qui agit sur un ensemble X . Soit $x \in X$, $G_x \subset G$ son stabilisateur, et $G.x$ son orbite. Montrer que

$$|G| = |G_x| \times |G.x|.$$

Supposons maintenant X fini, et soit $G.x_1, G.x_2, \dots, G.x_K$ les différentes orbites de G . Montrer que

$$|X| = \sum_{i=1}^K \frac{|G|}{|G.x_i|}.$$

Exercice 5 (Formule de Burnside) Montrer que si G est un groupe fini opérant sur un ensemble fini X , et si X^g désigne l'ensemble des $x \in X$ fixés par un élément $g \in G$, le nombre d'orbites est égal à

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

Fait dans la feuille de F Digne sur les groupes.

Sans démonstrations!

Exercice 6 Décrire l'action du groupe diédral d'ordre $2n$, en distinguant les cas n pair et n impair, sur un polygone régulier à n côtés.

Corrigé: Il y a n rotations d'angle $2k\pi/n$, et n réflexions. Si n est impair, ces n réflexions sont conjuguées, d'axes passant par un sommet et le milieu du côté opposé. Si n est pair, il y a $n/2$ réflexions par rapport à un axe passant par deux sommets opposés et $n/2$ réflexions par rapport à un axe passant par les milieux de deux côtés opposés. Notons aussi que quand n est pair, le groupe contient $-Id$.

Exercice 7 Décrire l'action du groupe des isométries directes du tétraèdre régulier sur lui-même, en énumérant tous les éléments et leurs actions.

Décrire également le groupe des isométries indirectes.

Le groupe des isométries directes est isomorphe à A_4 , et le groupe de toutes les isométries à S_4 . On a ainsi pour chacun des 4 sommets, 2 rotations d'ordre 3, d'angles $2\pi/3$ et $4\pi/3$, d'axes passant par un sommet et le milieu du côté opposé. Il y a également, pour chacun des trois couples d'arêtes opposées, une rotation d'ordre 2, angle π (retournement), d'axe joignant les milieux des deux arêtes opposées. Avec l'identité, nous avons les 12 déplacements de A_4 .

Les réflexions par rapport aux plans passant par une arête et le milieu de l'arête opposée donnent 6 antidéplacements.

Les six autres s'obtiennent par composition avec un anti-déplacement. En tant que permutations de l'ensemble des 4 sommets, ce sont les six cycles d'ordre 4. Par exemple, si on appelle A, B, C, D les 4 sommets, le retournement qui échange A et C , et B et D , suivi de la réflexion d'axe le plan médiateur de $[BC]$ (les points B et C de départ) envoie A sur C , B sur A , C sur D , D sur B .

Exercice 8 Mêmes questions avec le cube.

Corrigé Le groupe des isométries directes du cube s'identifie à S_4 . On le voit en regardant l'effet des isométries sur les 4 grandes diagonales.

Pour chacun des trois couples de faces opposées, il y a 3 rotations d'angles $k\pi/2$, $k = 1, 2, 3$, soit 9 telles rotations.

Pour chacun des 6 couples d'arêtes opposées, il y a un retournement passant par les milieux des arêtes opposées, soit 6 retournements.

Pour chacun des 4 couples de sommets opposés, il y a 2 rotations d'angles $2\pi/3$, $4\pi/3$.

Avec Id on arrive aux 24 éléments de S_4 .

Pour obtenir les 24 éléments restants, on prend une réflexion, ou plus simplement $-Id$, et on fait le produit semi-direct de cet élément d'ordre 2 avec le groupe des déplacements du cube.

Il y a $-Id$, bien sûr.

Il y a pour chacun des 6 couples d'arêtes opposées, la réflexion par rapport au plan qui les contient.

Pour chacun des 3 quadruplets d'arêtes parallèles, il y a la réflexion par rapport au plan médiateur commun des 4 arêtes.

Les 14 autres sont les opposées des rotations d'ordre 3 ou 4.

Exercice 9 Idem avec l'octaèdre régulier.

L'octaèdre régulier s'obtient en prenant comme sommets les centres des faces d'un cube. (Et réciproquement). On dit qu'ils sont duaux l'un de l'autre. En particulier, ils ont même groupe d'isométries, d'un point de vue algébrique.

Les 9 rotations d'ordre 4 ont leurs axes qui passent par deux sommets opposés.

Les 8 rotations d'ordre 3 ont leurs axes qui passent par les centres de deux faces opposées.

Les retournements (d'ordre 2) ont leurs axes qui passent par les milieux de deux arêtes opposées.

Les 24 antidéplacements sont les opposés des 24 déplacements.

Parmi les antidéplacements, il y a $-Id$, les 3 réflexions par rapport aux plans contenant 4 sommets de l'octaèdre, les 6 réflexions par rapport aux plans médiateurs de 2 faces opposées.

Les 14 autres, comme pour le cube, sont les opposés des rotations d'ordre 3 ou 4.

Exercice 10 Idem avec l'icosaèdre régulier.

Corrigé On se limite ici aux isométries directes. Le groupe est isomorphe à \mathcal{A}_5 , il a donc 60 éléments. Avec un peu d'attention, on observera qu'on peut regrouper les couples d'arêtes opposées en triplets de directions deux à deux orthogonales (chaque direction étant donnée par le couple d'arêtes opposées). Il y a 5 tels triplets, et les isométries de l'icosaèdre les permutent.

L'icosaèdre a 20 faces, regroupées en 10 paires de faces parallèles, images l'une de l'autre par $-Id$.

Pour chacun des 10 couples de faces, il y a 2 rotations d'ordre 3, soit 20 rotations d'ordre 3.

L'icosaèdre a 12 sommets, deux à deux opposés (images l'un de l'autre par $-Id$). Pour chacun des 6 couples de sommets opposés, il y a 4 rotations d'ordre 5, soit au total 24 éléments d'ordre 5.

L'icosaèdre a 30 arêtes, deux à deux opposées (deux arêtes opposées sont parallèles). Pour chacun des couples d'arêtes opposées, il y a un retournement (d'ordre 2), soit au total 15 retournements.

Avec Id , on arrive aux 60 isométries directes de l'icosaèdre.

Exercice 11 Idem avec le dodécaèdre régulier.

Corrigé C'est la même chose qu'au-dessus. Le dodécaèdre a 12 faces, 30 arêtes, et 20 sommets. Il y a Id , 15 retournements par rapport aux médiatrices communes d'arêtes opposées, 6 fois 4 rotations d'ordre 5, d'axes passant par les centres de faces opposées, et 10 fois 2 rotations d'ordre 3 d'axes passant par deux sommets opposés.

Produit semi-direct et actions de groupes

Josette Calais, Théorie des groupes
Perrin, Cours d'Algèbre

Exercice 12 Soient N et H deux groupes, et $Aut(N)$ le groupe des automorphismes du groupe N . Soit $\varphi : H \rightarrow Aut(N)$ un morphisme.

- Définir une opération de H sur N via φ .
- Définir le produit semi-direct de N par H relativement à φ .
- Y a-t-il unicité ?
- Donner des exemples concrets.

Corrigé a) φ définit une action de H sur N par $h.n = \varphi(h)(n)$.

b) Le produit semi-direct est défini sur l'ensemble $N \times H$ par $(n, h) \times (n', h') = (n(h.n'), hh')$. Cela définit une loi de groupe sur l'ensemble $N \times H$, et pour éviter la confusion avec le produit de groupe $N \times H$, on note ce nouveau groupe $N \rtimes_{\varphi} H$, ou souvent $N \rtimes H$.

c) Il y a unicité du produit semi-direct, une fois défini φ !! Mais attention, il peut y avoir BEAUCOUP de morphismes de H dans $Aut(N)$, et donc plusieurs façons de définir un produit semi-direct. !!

d) Cf exo ci-dessous.

Exercice 13 Admettons ici que le groupe G^+ des isométries directes du cube unité de \mathbb{R}^3 est isomorphe au groupe symétrique S_4 . Montrez que le groupe de toutes les isométries du cube s'obtient par produit semi-direct de G^+ par le groupe engendré par une isométrie de déterminant -1 .

Déduisez-en qu'un produit direct peut être isomorphe à un produit semi-direct non trivial.

Corrigé Le groupe G^+ des isométries directes du cube est un sous-groupe d'indice 2 du groupe G des isométries du cube, car c'est le noyau du déterminant $\det : G \rightarrow \{\pm 1\}$. Etant donné un élément σ d'ordre 2 et de déterminant -1 de G , le produit semi-direct $G^+ \rtimes_{\sigma} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est inclus dans G , et G^+ est d'indice 2 dans $G^+ \rtimes_{\sigma} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Donc $G^+ \rtimes_{\sigma} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = G$.

Si σ est une réflexion par rapport à un plan, le produit semi-direct est non trivial, au sens où l'action par conjugaison de σ sur G^+ ne commute pas avec G^+ . Mais si $\sigma = -Id$, alors on vérifie aisément que $N \rtimes_{-Id} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = N \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Quaternions

Perrin, Cours d'Algèbre, chapitre 7.

Vidonne, Groupe circulaire, nombres complexes, etc

Exercice 14 Montrer qu'il existe une algèbre, notée \mathbf{H} , de dimension 4 sur \mathbb{R} , munie d'une base notée $1, i, j, k, l$, tq $i^2 = j^2 = k^2 = -1, jk = -kj = i, ki = -ik = j, ij = -ji = k$. On note $q = a + bi + cj + dk, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ un élément de \mathbf{H} .

Corrigé Voir Perrin, admis ici. Ce n'est pas trivial, et mérite d'être étudié.

Exercice 15 Si $q = a + bi + cj + dk$, on note $\bar{q} = a - bi - cj - dk$ son conjugué. **a)** Vérifier que $\bar{q} = q$ ssi $q \in \mathbb{R}$ (i.e. $b = c = d = 0$). **b)** On note $N(q) = q\bar{q}$. Vérifier que N est le carré d'une norme sur \mathbf{H} (vu comme espace vectoriel). **c)** Vérifier que la conjugaison est une isométrie pour cette norme.

On note \mathbb{R} l'espace des quaternions réels, et P celui des quaternions imaginaires purs ($a = 0$).

a) Clair.

b) Si $q = a + bi + cj + dk$, alors $q\bar{q} = N(q) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Il est alors clair que N est une norme, car elle coïncide avec la norme euclidienne sur \mathbf{H} vu comme \mathbb{R}^4 , comme espace vectoriel. **c)** Cette question utilise le fait que N est un morphisme de groupes, et donc que $N(gqg^{-1}) = N(g)N(q)N(g^{-1}) = N(q)N(gg^{-1}) = N(q)N(Id) = N(q)$. (cf exo ci-dessous).

Exercice 16 Montrer que \mathbb{H} est un corps, de centre $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$.

Vérifier que la norme N est un morphisme de groupes surjectif de (\mathbb{H}^*, \times) dans (\mathbb{R}^*, \times) . On notera G son noyau, i.e. l'ensemble des quaternions de norme 1.

Corrigé On a vu que $N(q) = 0$ ssi $q = 0$, et que si $N(q) \neq 0, q^{-1} = \frac{1}{N(q)}\bar{q}$. Donc \mathbb{H} est un corps. Le centre contient clairement \mathbb{R} . Si $q \in Z(\mathbf{H})$, les relations $qi = iq, qj = jq, qk = kq$ suffisent à obtenir $q \in \mathbb{R}$.

Pour vérifier que N est un morphisme de groupes, étudions $N(g_1g_2) = g_1g_2\overline{g_1g_2}$. Or $\overline{g_1g_2} = \overline{g_2g_1}$. Ceci se vérifie d'abord sur la base $1, i, j, k$ puis s'étend par \mathbb{R} -linéarité.

N est clairement surjective sur \mathbb{R}_+ , car sa restriction à \mathbb{R} l'est déjà.

Exercice 17 (Action de G sur \mathbb{R}^3) On considère l'action de \mathbb{H}^* sur \mathbb{H} par conjugaison.

a) Pourquoi suffit-il de considérer l'action du sous-groupe G des quaternions de norme 1 ?

b) Notons $S_q : q' \in P \mapsto qq'q^{-1}$. Montrer que S_q est une isométrie pour la norme N .

c) Montrer que S_q peut se restreindre en une isométrie (toujours notée S_q) de P , pour la norme N .

d) L'application S définit ainsi un morphisme de groupe de G dans $O(N_P)$ identifié à $O(3, \mathbb{R})$. Quel est son noyau?

e) A l'aide de la définition de G , montrer que G est connexe pour la topologie de \mathbb{H} vu comme \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 4.

f) Montrer que l'application $\det \circ S$ est continue de G dans $\{\pm 1\}$.

g) En déduire que S envoie G dans $SO(3, \mathbb{R})$.

h) Soit $p \in P \cap G$ un imaginaire pur de norme 1. Montrer que S_p fixe p , puis que S_p est un retournement d'axe $\langle p \rangle$.

i) Déduire des questions précédentes que $S : G/\{\pm 1\} \rightarrow SO(3, \mathbb{R})$ est un isomorphisme.

Pour celles et ceux qui savent ce que c'est, G est le revêtement universel de $SO(3, \mathbb{R})$. En effet, S est un revêtement, et G est topologiquement une sphère $S^3 \subset \mathbb{R}^4$, donc simplement connexe (et connexe).

Corrigé a) On a déjà vu plus haut que la conjugaison par g coïncide avec celle par $\frac{g}{\sqrt{N(g)}}$. Il suffit donc de considérer l'action du groupe G des quaternions de norme 1.

b) Ceci a déjà été vu plus haut. Si on considère \mathbf{H} comme \mathbb{R}^4 -espace vectoriel, S_q est donc une isométrie de \mathbb{R}^4 muni de sa norme euclidienne.

c) La restriction de S_q à \mathbb{R} est l'identité. Comme S_q est une isométrie euclidienne, elle préserve l'orthogonal de \mathbb{R} dans \mathbf{H} , c'est-à-dire l'ensemble P des imaginaires purs. Et sa restriction à P est toujours une isométrie, i.e. préserve N .

d) Soit $q \in G$ tq S_q restreint à P soit l'identité. Alors $q \in Z(\mathbf{H}) \cap G = \{\pm 1\}$.

e) G s'identifie très naturellement à la sphère $S^3 \subset \mathbb{R}^4$, qui est connexe. Donc G est connexe pour sa topologie de \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 4.

f-g) L'application S est continue (car polynomiale en les coefficients), et envoie donc G sur un connexe. Donc $S(G) \subset SO(3, \mathbb{R})$.

h) On a clairement $S_p(p) = pp\bar{p} = p$. De plus, comme $p \in P, \bar{p} = -p$, de sorte que $p\bar{p} = -p^2 = 1$, d'où $p^2 = -1$. Calculons maintenant $(S_p)^2 = S_{p^2} = S_{-id} = Id$. Donc S_p est une involution fixant p . Vue comme isométrie de \mathbb{R}^3 , c'est donc le retournement d'axe $\langle p \rangle$.

i) S définit un morphisme de groupes injectif de $G/\{\pm 1\}$ sur $SO(3, \mathbb{R})$. Par ailleurs, son image contient tous les retournements. Or les retournements engendrent $SO(3, \mathbb{R})$. Donc S définit un isomorphisme de groupes de $G/\{\pm 1\}$ sur $SO(3, \mathbb{R})$.

Actions de groupes sur des espaces de matrices

Fresnel, Algèbre des matrices

Mneimé Testard Groupes de Lie

Gonnord-Tosel, Calcul différentiel.

Remarque importante Tout ce qui concerne les opérations sur les lignes et les colonnes, les matrices semblables et équivalentes, les invariants de similitudes, les différentes décompositions matricielles peut bien évidemment prendre place dans la leçon “Exemples d’actions de groupes sur des espaces de matrices”.

Nous nous concentrons dans ce qui suit sur les groupes de Lie, notion qui apparaît dans la leçon en question, mais aussi dans “exponentielle de matrices”, “sous-variétés”, “applications différentiables” ou “TIL, TFF”.

Rappelons qu’une sous-variété M de \mathbb{R}^n est un sous-ensemble de \mathbb{R}^n tel que chaque point $m \in M$ admet un voisinage V dans \mathbb{R}^n tq $V \cap M$ est le noyau d’une submersion. (C’est une des définitions, celle dont nous nous servirons ici.)

Exercice 18 (Groupes de Lie) Pour nous, un *groupe de Lie linéaire* est un groupe de matrices qui pour un certain $k \in \mathbb{N}$ est inclus dans \mathbb{R}^k , et qui en tant que sous-ensemble de \mathbb{R}^k est une sous-variété différentiable de \mathbb{R}^k , et tel que de plus les structures de groupe et de sous-variété sont compatibles, à savoir que la multiplication est une application différentiable de $G \times G \rightarrow G$, et l’inverse est un difféomorphisme de $G \rightarrow G$.

Classiquement, un groupe de Lie linéaire est souvent défini comme étant un sous-groupe fermé de $GL(n, \mathbb{R})$. L’équivalence des deux définitions est démontrée par exemple dans Mneimé Testard, ou Gonnord Tosel (« théorème de Von Neumann »).

a) Vérifier que chacun des groupes suivants est un groupe de Lie et préciser sa dimension :

$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), \det A = 1\}$, $O(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), {}^tAA = Id\}$, $SO(n, \mathbb{R}) = O(n, \mathbb{R}) \cap SL(n, \mathbb{R})$,
 $SO(q) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), \det A = 1 \text{ et } {}^tABA = B\}$, avec q une forme quadratique sur \mathbb{R}^n , et B la matrice de la forme bilinéaire symétrique associée dans la base canonique, $SU(n, \mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}), {}^t\bar{A}A = Id\}$.

b) Vérifier que ces groupes sont également des sous-groupes fermés de $GL_n(\mathbb{R})$.

c) Soit M une sous-variété de \mathbb{R}^k , et $x \in M$. L’espace tangent en x à M est par définition l’ensemble $T_x M := \{c'(0), c :]-1, 1[\rightarrow M \subset \mathbb{R}^k \text{ courbe } C^1\}$. Pour chacun des groupes de Lie ci-dessus, préciser quel est son espace tangent en l’identité. L’espace tangent en l’identité est appelé *algèbre de Lie* du groupe de Lie.

Cf Gonnord T Osel exo 15 p76

Corrigé : a) $SL(n, \mathbb{R})$ est l’ensemble des 0 de la fonction $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(A) = \det(A) - 1$. Cette application est C^∞ , de différentielle $df_A.H = Tr(A^{-1}H)$ si A est inversible. Cette différentielle est non nulle, donc de rang un, donc surjective, donc f est une submersion en tout point $A \in SL(n, \mathbb{R})$. Donc $SL(n, \mathbb{R})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$, de dimension $\dim(M_n(\mathbb{R})) - rg(df_A) = n^2 - 1$. La multiplication et l’inversion des matrices sont des applications polynomiales en les coefficients, donc C^∞ . Donc $SL(n, \mathbb{R})$ est un groupe de Lie.

On raisonne de même pour les autres groupes.

Le groupe $O(n, \mathbb{R})$ est l’ensemble des 0 de la fonction $f(A) = {}^tAA - Id$. Cette application f est à valeurs dans l’espace vectoriel des matrices symétriques, qui est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$. Sa différentielle vaut $df_A.H = {}^tAH + {}^tHA$. On a donc $df_{Id}.H = {}^tH + H$. Cette application est surjective sur l’espace des matrices symétriques. Elle est donc de rang maximal $n(n+1)/2$. Donc l’ensemble des zéros de f est une sous-variété de dimension $n(n-1)/2 = n^2 - n(n-1)/2$. Pour les mêmes raisons que ci-dessus, c’est un groupe de Lie.

Le groupe $O(n, \mathbb{R})$ n’est pas connexe. Il a deux composantes connexes (ouvertes et fermées), dont l’une, $SO(n, \mathbb{R}) = O(n, \mathbb{R}) \cap \det^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ est un groupe. En d’autres termes, localement en restriction à l’ouvert connexe $\det^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$, $O(n, \mathbb{R})$ et $SO(n, \mathbb{R})$ coïncident. C’est donc une sous-variété et un groupe de Lie de $M_n(\mathbb{R})$ de même dimension $n(n-1)/2$ que $O(n, \mathbb{R})$. L’autre composante connexe, parfois notée $O^-(n, \mathbb{R})$, est également une sous-variété, mais n’est pas un groupe.

Si q est une forme quadratique non dégénérée, $O(q)$ est encore une sous-variété de dimension $n(n-1)/2$ (cf [GT] page 77).

$U_n(\mathbb{C})$ est le groupe des matrices à coefficients dans \mathbb{C} , tq ${}^t\bar{A}A = Id$. L’application $f : A \mapsto {}^t\bar{A}A - Id$ est C^∞ , à valeurs dans les matrices hermitiennes. L’espace vectoriel des matrices hermitiennes est de dimension **réelle** $n(n-1) + n = n^2$ dans $M_n(\mathbb{C})$ qui est lui de dimension $2n^2$.

L’application f est une submersion, car $df_{Id}.H = {}^t\bar{H} + H$ est surjective. Donc $U_n(\mathbb{C})$ a pour dimension $n^2 = 2n^2 - n^2$.

Attention, le passage de $U_n(\mathbb{C})$ à $SU_n(\mathbb{C})$ est différent de celui de $O(n, \mathbb{R})$ à $SO(n, \mathbb{R})$. En effet, dans le cas réel, le déterminant vaut ± 1 sur $O(n, \mathbb{R})$, de sorte que $SO(n, \mathbb{R})$ est une composante connexe de $O(n, \mathbb{R})$, de même dimension.

En revanche, le déterminant d'une matrice de $U_n(\mathbb{C})$ est un complexe de module 1. L'application $A \in U_n(\mathbb{C}) \rightarrow \det A \in S^1$ est C^∞ et surjective, car en multipliant A par un nombre complexe de module 1, on ne sort pas de $U_n(\mathbb{C})$, mais on décrit tous les déterminants de module 1 possibles. Donc sa différentielle en l'identité est de rang un. Donc $SU_n(\mathbb{C})$ est une sous-variété de $U_n(\mathbb{C})$ de dimension $n^2 - 1$ (formellement, ceci n'a pas été vu dans les définitions de sous-variétés de \mathbb{R}^n , car il s'agit d'une sous-variété d'une sous-variété.)

On en déduit que l'ensemble $SU_n(\mathbb{C})$ des matrices de $U_n(\mathbb{C})$ de déterminant 1 est une sous-variété de $M_n(\mathbb{C})$ de dimension réelle $n^2 - 1$.

b) Ça se voit.

c) L'espace tangent d'une sous-variété au point m est l'ensemble des vecteurs vitesse en $t = 0$ des courbes C^1 tracées sur la surface qui vérifient $c(0) = m$. C'est un espace vectoriel de dimension égale à la dimension de la sous-variété.

Ici, on voit aisément que pour $SL(n, \mathbb{R})$, si $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow SL(n, \mathbb{R})$, alors $\det c(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'où $Tr(c'(0)) = 0$. En particulier, $T_{Id}SL(n, \mathbb{R}) \subset \{A \in M_n(\mathbb{R}), Tr(A) = 0\}$. L'ensemble des matrices de trace nulle est de dimension $n^2 - 1$, c'est donc l'espace tangent. Autrement dit, $T_{Id}SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), Tr(A) = 0\}$.

De même on voit que $T_{Id}SO(n, \mathbb{R}) = T_{Id}O(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), {}^tA = -A\}$. Et $T_{Id}U_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}), {}^t\bar{A} + A = 0\}$, $T_{Id}SU_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}), {}^t\bar{A} = -A \text{ et } Tr(A) = 0\}$.

Exercice 19 (Application exponentielle) On suppose connues les propriétés classiques de l'exponentielle sur $M_n(\mathbb{R})$. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ tq $\|M\| < 1$. On définit $\text{Log}(Id + M) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} M^k}{k}$.

a) Montrer que $\exp(\text{Log}(Id + M)) = Id + M$ pour toute matrice M tq $\|M\| < 1$.

b) Montrer que pour tous $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}} \right)^k = e^{A+B} \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}} e^{-\frac{A}{k}} e^{-\frac{B}{k}} \right)^{k^2} = e^{AB-BA}.$$

c) Soit G un groupe de Lie linéaire (sous-variété et sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$). On pose $\mathfrak{g} = \{M \in M_n(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, e^{tM} \in G\}$. Montrer que \mathfrak{g} est une sous-algèbre de Lie de $M_n(\mathbb{R})$, i.e. un sous-espace vectoriel stable par le crochet de Lie $[M, N] = MN - NM$.

d) Montrer que l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie linéaire est incluse dans son espace tangent en l'identité.

e) Admettons le théorème de Von Neumann ([GT] ou [MT]), qui nous dit que Si G est un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$, alors il existe un voisinage V de 0 dans \mathfrak{g} et un voisinage W de Id dans G tq l'exponentielle réalise un homéomorphisme de V dans W .

En déduire que $\mathfrak{g} = T_{Id}G$.

f) Quelle est l'algèbre de Lie de $GL_n(\mathbb{R})$?

[GT]= Gonnord Tosel exos 19 et 20 p81 ou [MT]= Mneimé Testard p64 et suivantes

Corrigé : a) Voir corrigé par ex dans [GT] page 82. C'est un exo sur les algèbres de Banach. D'un point de vue abstrait, on sait que si $\|x\| < 1$, alors $1 + x$ est inversible, et $(1 + x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$. En intégrant cette relation, pour $\|x\| < 1$, on définit $\text{Log}(1 + x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} x^{k+1}$. On définit ensuite $\psi(t) = \text{Log}(1 + tx)$. Pour $0 \leq t \leq 1$, on a alors $\psi'(t) = x(1 + tx)^{-1}$. Les $\psi(t)$, $0 \leq t \leq 1$ commutent entre elles. On peut alors calculer l'exponentielle: $\varphi(t) = \exp(\text{Log}(1 + tx))$, ou plutôt sa dérivée en t , $\varphi'(t) = x(1 + tx)^{-1} \varphi(t)$. En $t = 0$, on a $\varphi(0) = 1$, d'où $\varphi(t) = 1 + tx$ et $\varphi(1) = \exp(\text{Log}(1 + x)) = 1 + x$.

b) Un DL à l'ordre 1 donne $e^{A/k} e^{B/k} = 1 + \frac{A+B}{k} + o(\frac{1}{k})$. Si k est assez grand, $\text{Log}(e^{A/k} e^{B/k})$ est bien défini. Et on a $(e^{A/k} e^{B/k})^k = \exp(k \text{Log}(e^{A/k} e^{B/k}))$. Quand $k \rightarrow +\infty$, on a $k \text{Log}(e^{A/k} e^{B/k}) \rightarrow A + B$. D'où le résultat.

Pour la deuxième relation, il faut écrire $e^{A/k} = 1 + \frac{A}{k} + \frac{A^2}{2k^2} + o(\frac{1}{k^2})$, idem avec $e^{\pm B/k}$, et $e^{\pm A/k}$, en déduire que $e^{A/k} e^{B/k} e^{-A/k} e^{-B/k} = 1 + \frac{1}{k^2} (AB - BA) + o(1/k^2)$. Le même raisonnement que ci-dessus, pour k assez grand, à l'aide du logarithme matriciel, donne le résultat voulu.

c) La relation ci-dessus montre que si $A, B \in \mathfrak{g}$, alors $e^{t(AB-BA)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} (e^{tA/k} e^{tB/k} e^{-tA/k} e^{-tB/k})^{k^2}$. Comme G est supposé fermé, cette quantité est dans G comme limite d'éléments de G .

L'autre limite démontrée en b) permet de montrer que \mathfrak{g} est un espace vectoriel. C'est donc ce qu'on appelle une algèbre de Lie.

d) La courbe $c_M : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{tM}$ est C^1 , à valeurs dans G , et vaut Id en $t = 0$. Sa dérivée en $t = 0$, soit le vecteur $c'_M(0) = M$, appartient donc à l'espace tangent à G en l'identité. Autrement dit, on a l'inclusion $\{M \in M_n(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, e^{tM} \in G\} \subset T_{Id}G$.

e) Le théorème de Von Neumann implique que \mathfrak{g} et G ont même dimension. Donc \mathfrak{g} et $T_{Id}G$ aussi. Donc l'inclusion démontrée en d) est une égalité.

f) L'algèbre de Lie de $GL_n(\mathbb{R})$ est $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 20 (Action adjointe, exponentielle) Soit $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ un groupe de Lie linéaire. On considère l'action de G sur $GL_n(\mathbb{R})$ par conjugaison. Notons C_g l'application $g' \in GL_n(\mathbb{R}) \mapsto gg'g^{-1}$.

a) Quelle est la différentielle de C_g en l'identité ? On note $Ad(g) = d(C_g)_{Id} : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ l'application linéaire inversible ainsi définie, en rappelant que $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$.

b) Considérons maintenant Ad comme représentation linéaire de G dans $Aut(M_n(\mathbb{R}))$ ($Aut(E)$ désigne les endomorphismes linéaires inversibles de l'ev E). On l'appelle *représentation adjointe* de $GL_n(\mathbb{R})$. On note $adA : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ l'application $ad(A)(H) = [A, H] = AH - HA$. Montrer que la différentielle de Ad en l'identité vérifie $d(Ad)_{Id}(M) = ad(M)$.

c) Soit $t \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(t)$ un sous-groupe à un paramètre de $GL_n(\mathbb{R})$, i.e. un morphisme additif de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il est C^∞ . En déduire qu'il est de la forme $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tX)$, où $X = \varphi'(0)$.

d) Montrer la relation

$$\exp(t ad(X)) = Ad(\exp(tX)), \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

En déduire le noyau de ad .

Corrigé Le corrigé est pris partiellement de [MT], [GT].

a) Un calcul immédiat donne $C_g(I + h) - C_g(I) = ghg^{-1}$. Autrement dit, $d(C_g)_I.h = ghg^{-1}$. Soit encore $Ad(g).h = ghg^{-1}$. La seule différence est que C_g est la conjugaison par g dans le groupe $GL_n(\mathbb{R})$, et $Ad(g)$ est la conjugaison par g dans l'algèbre $M_n(\mathbb{R})$.

b) En différentiant une fois de plus, on constate que $Ad(I + h).B - Ad(I).B = (I + h)B(I + h)^{-1} - B$. On en déduit aisément que $d(Ad)_{Id}.h = ad(h)$.

c) [MT page 63-64] Choisissons une application C^∞ à support compact contenant 0, $\theta : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$, telle que $\int_{\mathbb{R}} \theta d\lambda = 1$. Du fait que φ est un morphisme de groupe, on observe que $\theta * \varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} \theta(s)\varphi(t-s)ds = \int_{\mathbb{R}} \theta(s)\varphi(-s) ds \times \varphi(t)$. Par ailleurs, il est classique que $\theta * \varphi$ est C^∞ . Il suffit donc de pouvoir diviser le terme de droite par $\int_{\mathbb{R}} \theta(s)\varphi(-s)ds$, i.e. de montrer que cette quantité est inversible, pour déduire que φ est C^∞ .

Pour cela, il suffit de choisir θ de sorte que $\|\int_{\mathbb{R}} \theta(s)\varphi(-s)ds - Id\| < 1$. Ceci est possible, car $\|\int_{\mathbb{R}} \theta(s)\varphi(-s)ds - Id\| \leq \int_{\mathbb{R}} \|\theta(s)\| \|\varphi(s)^{-1} - Id\| ds$, φ^{-1} est continue, et le support de θ est supposé compact.

Comme φ est un morphisme de groupes dérivable, on en déduit que $\varphi'(t) = \varphi(t)\varphi'(0)$. Donc il est de la forme $\varphi(t) = \exp(tX)$, avec $X = \varphi'(0)$.

d) On obtient la relation en regardant les valeurs et les dérivées en 0 des expressions de gauche et de droite.

On en déduit que si $X \in Ker(ad)$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tX)$ est dans le noyau de Ad . Autrement dit, la conjugaison par $\exp(tX)$ commute avec $M_n(\mathbb{R})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc $\exp(tX)$ est une homothétie pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Notons que tout ce qui a été fait ci-dessus dans \mathbb{R} est aussi valable sur \mathbb{C} .

Exercice 21 ($SU(2, \mathbb{C})$ et $SO(3, \mathbb{R})$) Rappelons que $SU(2, \mathbb{C}) \subset M_2(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices vérifiant $A^*A = id$. On montre dans cet exercice qu'il y a un isomorphisme explicite $SU(2, \mathbb{C})/\{\pm Id\} \rightarrow SO(3, \mathbb{R})$. (Voir aussi les exercices sur les quaternions.

a) Vérifier que $SU(2, \mathbb{C})$ est difféomorphe à la sphère unité $S^3 \subset \mathbb{R}^4$.

b) Montrer que $\underline{su}_2(\mathbb{C})$ est l'algèbre de Lie constituée des matrices anti-hermitiennes.

c) Vérifier que les matrices $\xi_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $\xi_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ forment une base de $\underline{su}_2(\mathbb{C})$, et satisfont les relations $[\xi_1, \xi_2] = \xi_3$, $[\xi_2, \xi_3] = \xi_1$, et $[\xi_3, \xi_1] = \xi_2$.

d) Identifions ici $\underline{su}_2(\mathbb{C})$ à \mathbb{R}^3 , en tant qu'espaces vectoriels. Vérifier que si $g \in SU(2, \mathbb{C})$, alors $Ad(g)$ préserve $\underline{su}_2(\mathbb{C})$ dans $M_2(\mathbb{C})$. En déduire que la représentation adjointe Ad définit un morphisme de groupes de $SU(2, \mathbb{C})$ dans $Aut(\underline{su}_2(\mathbb{C})) = GL(3, \mathbb{R})$.

e) Si $A = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 \in \underline{su}_2(\mathbb{C})$, montrez que $\det A = \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$.

f) Soit $g \in SU(2, \mathbb{C})$. Montrez que si $M \in \underline{su}_2(\mathbb{C})$, $\det(Ad(g).M) = \det M$. Déduisez-en que vu comme élément de $GL(3, \mathbb{R})$, $Ad(g) \in O(3, \mathbb{R})$, soit encore que Ad définit un morphisme de groupes de $SU(2, \mathbb{C})$ dans $O(3, \mathbb{R})$. **g)** Par un argument de connexité, montrez que Ad est un morphisme de groupes de $SU(2, \mathbb{C})$ dans $SO(3, \mathbb{R})$.

h) Vérifier que son noyau est $\{\pm Id\}$.

i) En utilisant la conclusion de la question f), et par un argument de dimension, montrer que l'application linéaire injective $ad : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ induit un isomorphisme linéaire de \mathbb{R} -espaces vectoriels, encore noté ad par abus de notation, de $\underline{su}_2(\mathbb{C})$ dans $\underline{so}_3(\mathbb{R})$.

j) A l'aide du théorème d'inversion locale, montrer que Ad envoie un voisinage de l'identité dans $SU(2, \mathbb{C})$ sur un voisinage de l'identité dans $SO(3, \mathbb{R})$.

k) Montrer que l'image de $SU(2, \mathbb{C})$ dans $SO(3, \mathbb{R})$ par Ad est un sous-groupe ouvert et fermé. Conclure.

l) En utilisant la relation $\exp(ad(X)) = Ad(\exp(X))$ et la surjectivité de l'exponentielle (à démontrer) de $\underline{so}(3, \mathbb{R})$ dans $SO(3, \mathbb{R})$, on peut conclure également à la surjectivité de Ad .

Voir par ex Mneimé Testard, page 125 et suivantes.

Corrigé

a) $SU(2, \mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices tq $A^*A = Id$ et $\det A = 1$. Si $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, alors on a (1) $|\alpha|^2 + |\gamma|^2 = 1$, (2) $|\beta|^2 + |\delta|^2 = 1$, (3) $\alpha\bar{\beta} + \gamma\bar{\delta} = 0$, et (4) $\alpha\bar{\delta} - \beta\bar{\gamma} = 1$.

De (3) on déduit que $\bar{\alpha}\beta\gamma = -|\gamma|^2\delta$. De (4), on obtient que $\bar{\alpha} = |\alpha|^2\delta - \bar{\alpha}\beta\gamma = (|\alpha|^2 + |\gamma|^2)\delta = \delta$. De la même manière on obtient $\bar{\gamma} = -\beta$, et bien sûr, $|\alpha|^2 + |\gamma|^2 = 1$.

Les matrices sont donc de la forme $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$, avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, de sorte que $SU(2, \mathbb{C})$ s'identifie à la sphère unité S^3 de \mathbb{R}^4 .

b-c) On vérifie que $su_2(\mathbb{C}) = \{A \in M_2(\mathbb{C}), Tr(A) = 0 \text{ et } A^* = -A\}$. En effet, si $t \rightarrow c(t)$ est une courbe différentiable à valeurs dans $SU(2, \mathbb{C})$, tq $c(0) = Id$, alors en différentiant $\det c(t) = 1$, on trouve que $Tr(c'(0)) = 0$ et en différentiant $c(t)^*c(t) = Id$ en $t = 0$, on trouve $c'(0)^* = -c'(0)$. Donc $su_2(\mathbb{C}) \subset \{A \in M_2(\mathbb{C}), Tr(A) = 0 \text{ et } A^* = -A\}$. L'égalité vient du fait que $SU(2, \mathbb{C})$ est une sous-variété de dimension réelle 3, donc son espace tangent est de dimension réelle trois (cf séances de géo diff). Autrement dit, une matrice de $su_2(\mathbb{C})$ est de la forme $\begin{pmatrix} ia & b+ic \\ -b+ic & -ia \end{pmatrix}$. Les relations de commutation entre les trois vecteurs de base de cette algèbre de Lie sont élémentaires.

d) Si $h \in su_2(\mathbb{C})$, et $g \in SU(2, \mathbb{C})$, alors $Ad(g).h = ghg^{-1}$. Donc $Tr(ghg^{-1}) = 0$ et $(ghg^{-1})^* = (g^{-1})^*h^*g^* = gh^*g^{-1} = -ghg^{-1}$. Donc $ghg^{-1} \in su_2(\mathbb{C})$.

L'application Ad définit clairement (pourquoi?) un morphisme de groupes de $SU(2, \mathbb{C})$ dans $Aut(M_2(\mathbb{C}))$. Et chaque élément $Ad(g)$ peut se restreindre en un élément de $Aut(su_2(\mathbb{C}))$. Donc Ad définit un morphisme de groupes de $SU(2, \mathbb{C})$ dans $Aut(su_2(\mathbb{C}))$. Comme les éléments $Ad(g)$ sont des isomorphismes linéaires, et que $su_2(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel de dimension 3, on peut voir Ad comme morphisme de groupes de $SU(2, \mathbb{C})$ dans $GL(3, \mathbb{R})$.

e) Si $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} ix_3 & -x_2 + ix_1 \\ x_2 + ix_1 & -ix_3 \end{pmatrix}$, un calcul immédiat donne $\det(A) = \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$.

f) On a vu que $Ad(g).M = gMg^{-1}$, d'où $\det(Ad(g).M) = \det(M)$. Si $M \in su_2(\mathbb{C})$, alors $M = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3$, et $\det(M) = \det(Ad(g).M) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Autrement dit, dans l'identification de $su_2(\mathbb{C})$ avec \mathbb{R}^3 , $Ad(g)$ est une isométrie de \mathbb{R}^3 . Donc on peut voir Ad comme morphisme de groupes de $SU(2, \mathbb{C})$ dans $O(3, \mathbb{R})$.

g) Le groupe $SU(2, \mathbb{C})$ s'identifie à la sphère $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ qui est connexe. Et Ad est continue. L'image d'un connexe par une application continue est connexe, donc Ad est un morphisme de groupes de $SU(2, \mathbb{C})$ dans $SO(3, \mathbb{R})$.

h) Si $g \in Ker(Ad)$, alors g commute avec tous les éléments de $su_2(\mathbb{C})$. Ecrivons $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Le fait que $g\xi_1 = \xi_1g$ donne $b = c = 0$. Le fait que $g\xi_2 = \xi_2g$ donne $a = d$. Donc g est une homothétie $g = aId$, qui commute avec ξ_3 . Le fait que g soit dans $SU(2, \mathbb{C})$ donne $a \in \mathbb{R}$, et $a^2 = 1$, d'où $g = \pm Id$. Donc $Ker(Ad) = \{\pm Id\}$.

i) L'application Ad est un morphisme de groupes de $GL(2, \mathbb{C})$ dans $Aut(M_2(\mathbb{C}))$, mais aussi de $SU(2, \mathbb{C})$ dans $SO(3, \mathbb{R}) \subset GL(3, \mathbb{R})$. Et sa différentielle en l'identité est ad . La différentielle de la restriction à $SU(2, \mathbb{C})$ est donc naturellement la restriction de la différentielle ad à l'espace tangent $T_{Id}SU(2, \mathbb{C}) = su_2(\mathbb{C})$. De plus, si $t \mapsto c(t)$ est une courbe C^1 à valeurs dans $SU(2, \mathbb{C})$, $t \mapsto Ad(c(t))$ est une courbe C^1 à valeurs dans $SO(3, \mathbb{R})$, de sorte que l'image de $su_2(\mathbb{C})$ par ad est incluse dans $T_{Id}SO(3, \mathbb{R}) = so_3(\mathbb{R})$.

Les espaces $su_2(\mathbb{C})$ et $so_3(\mathbb{R})$ sont tous deux de dimension 3 sur \mathbb{R} . L'application ad étant linéaire, il nous reste à montrer qu'elle est injective.

Soit $X \in su_2(\mathbb{C})$, tq $ad(X) = 0$ dans $so_3(\mathbb{R})$. Alors la relation pour tout $t \in \mathbb{R}$ $\exp(tad(X)) = Ad(\exp(tX))$ donne $Ad(\exp(tX)) = Id$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme $KerAd = \{\pm Id\}$, cela signifie $\exp(tX) = \pm Id$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par connexité, on obtient $\exp(tX) = Id$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc $X = 0$ en dérivant. D'où le résultat.

j) L'application ad est inversible de $su_2(\mathbb{C})$ dans $so_3(\mathbb{R})$. Et $ad = d(Ad)_{Id}$. Donc le TIL s'applique sur un voisinage de l'identité dans $SU(2, \mathbb{C})$, et montre que Ad envoie un voisinage de l'identité dans $SU_2(\mathbb{C})$ sur un voisinage de l'identité dans $SO(3, \mathbb{R})$.

En fait, là, on a grossièrement triché, puisque le TIL n'est vrai a priori que pour des applications définies sur des ouverts de \mathbb{R}^k .

Mais ce n'est pas grave. Voici comment on fait, dans les bons cas, pour passer d'un énoncé valide sur des ouverts de \mathbb{R}^n à un énoncé valide sur des ouverts de sous-variétés.

Comme $SU_2(\mathbb{C})$ est une sous-variété de dimension 3 de \mathbb{R}^8 , il existe un voisinage ouvert U_1 de Id dans \mathbb{R}^8 et un C^1 -difféomorphisme $f_1 : U_1 \rightarrow V_1 \subset \mathbb{R}^8$ tq $f(U_1 \cap SU(2, \mathbb{C})) = V_1 \cap (\mathbb{R}^3 \times \{0\})$. De même, il existe un voisinage ouvert U_2 de Id dans \mathbb{R}^9 et un C^1 -difféomorphisme $f_2 : U_2 \rightarrow V_2 \subset \mathbb{R}^9$ tq $f(U_2 \cap SO(3, \mathbb{R})) = V_2 \cap (\mathbb{R}^3 \times \{0\})$.

On considère alors l'application $f_2 \circ Ad \circ f_1^{-1} : V_1 \subset \mathbb{R}^8 \rightarrow V_2 \subset \mathbb{R}^9$. Les dimensions ne conviennent pas. On la restreint donc à $W_1 = f_1(U_1 \cap SU(2, \mathbb{C}))$, considéré comme ouvert de \mathbb{R}^3 . Son image est incluse dans $W_2 = f_2(U_2 \cap SO(3, \mathbb{R}))$ vu comme ouvert de \mathbb{R}^3 . Soit $\phi = f_2 \circ Ad \circ f_1^{-1} : W_1 = f_1(U_1 \cap SU(2, \mathbb{C})) \rightarrow W_2 = f_2(U_2 \cap SO(3, \mathbb{R}))$. Le TIL s'applique alors, et permet de dire que quitte à restreindre ϕ à un ouvert $W'_1 \subset W_1$, alors $\phi : W'_1 \rightarrow W'_2$ est un C^1 -difféomorphisme. Alors l'application Ad restreinte à $f_1^{-1}(W'_1)$ est un C^1 -difféomorphisme sur son image. C'est ce qu'on avait dit au départ, un peu vite, mais c'est quand même juste.

k) L'image de $SU(2, \mathbb{C})$ dans $SO(3, \mathbb{R})$ est fermée car Ad est continue. L'image est ouverte aussi. En effet, $SU(2, \mathbb{C})$ est ouvert dans lui-même, et Ad est un difféomorphisme d'un voisinage de l'identité sur son image, donc $Ad(SU(2, \mathbb{C}))$ contient un voisinage de l'identité. Comme $Ad(SU(2, \mathbb{C}))$ est un groupe, il contient un voisinage de n'importe quel point. Donc $Ad(SU(2, \mathbb{C}))$ est ouvert. Donc $Ad(SU(2, \mathbb{C}))$ est un sous-groupe connexe de $SO(3, \mathbb{R})$ qui contient un voisinage V de l'identité. Un voisinage de l'identité contient, pour ε assez petit, toutes les rotations d'angle inférieur à ε . Or toute rotation de $SO(3, \mathbb{R})$ peut s'écrire comme puissance d'une rotation d'angle au plus ε . Donc $Ad(SU(2, \mathbb{C})) = SO(3, \mathbb{R})$.

l) Comme ad est surjective de $su_2(\mathbb{C})$ sur $so_3(\mathbb{R})$, et l'exponentielle surjective de $so_3(\mathbb{R})$ dans $SO(3, \mathbb{R})$ (admis ici), on obtient que $\exp(ad(su_2(\mathbb{C}))) = SO(3, \mathbb{R}) = Ad(\exp(su_2(\mathbb{C})))$. De même, l'exponentielle est surjective (admis) de $su_2(\mathbb{C})$ dans $SU(2, \mathbb{C})$, d'où $Ad(\exp(su_2(\mathbb{C}))) = Ad(SU(2, \mathbb{C}))$. Donc Ad est surjective de $SU(2, \mathbb{C})$ dans $SO(3, \mathbb{R})$. C'est une autre façon de voir la surjectivité.

Définition d'un angle

Vidonne, Audin, ...

- Exercice 22 (Angles)** a) Qu'est-ce qu'un angle orienté d'un couple de vecteurs de \mathbb{R}^2 ?
b) Qu'est-ce qu'un angle non orienté de deux vecteurs de \mathbb{R}^2 ?
c) Qu'est-ce qu'un angle orienté de droites ?
d) Qu'est-ce qu'un angle non orienté de demi-droites ?
e) Comment *mesure*-t-on ces angles?

Exercice 23 (Angles dans l'espace) Qu'est-ce qu'un angle dièdre ? Un angle solide?

Permutations et polynômes symétriques

Les actions par permutation de S_n sont un exemple fondamental, en particulier, l'action sur les polynômes à n variables sont un exemple important. Il a été et sera traité par ailleurs, nous ne reviendrons pas dessus dans ce devoir.

Actions de groupes et sous-groupes finis de $O(2, \mathbb{R})$ et $SO(3, \mathbb{R})$

Le sujet sera traité dans le devoir sur les isométries. La classification des sous-groupes finis de $SO(3, \mathbb{R})$ (et $O(2, \mathbb{R})$) fait appel à l'action d'un groupe fini G d'isométries sur l'ensemble des points fixes des isométries non triviales de G sur la sphère unité de \mathbb{R}^3 .

Actions de groupes et théorèmes de Sylow

Ce paragraphe est pris de Francinou Gianella Nicolas tome 1,
Serre "Représentations linéaires des groupes finis",
et Perrin "Cours d'Algèbre"
et Josette Calais, Théorie des groupes.

- Exercice 24 (Lemme de Cauchy)** a) Soit G un groupe fini de cardinal p^n , p premier, $n \geq 1$, qui opère sur un ensemble E fini non vide. Posons $E^G = \{x \in E, \forall g \in G, g.x = x\}$. Montrez que $|E^G| \equiv |E| \pmod{p}$.
b) Soit H un groupe fini d'ordre n , et $p|n$ un diviseur premier de n . Montrez que H contient un élément d'ordre p (*Lemme de Cauchy*). On pourra pour cela utiliser une opération de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur l'ensemble E des $(x_1, \dots, x_p) \in H^p$ tq $x_1 \dots x_p = e_H$.

FGN Tome 1

Soit G un groupe fini d'ordre $g = p^n m$, où m est premier à p . Un *p-sous-groupe de Sylow* est un sous-groupe de G d'ordre p^n .

Nous allons montrer

- Théorème 1** a) *Il existe des p-sous-groupes de Sylow.*
b) *Ils sont conjugués par automorphismes intérieurs.*
c) *Tout p-sous-groupe de G est contenu dans un p-sous-groupe de Sylow.*
d) *Le nombre k de p-Sylow vérifie $k|n$, $k \equiv 1 \pmod{p}$, et donc $k|m$.*

Exercice 25 Rédiger la preuve avec le plus d'actions de groupes possibles, et tous les détails, en suivant la trame de Serre, Représentations linéaires des groupes finis, paragraphe 8.4 théorème 15 (et Perrin pour d).

Action de $SL(2, \mathbb{R})$ par homographies sur \mathbb{C} et sur \mathbb{H}

Ceci sera traité dans le devoir sur les homographies.

Actions de groupes et topologie

Voir Mneimé Testard, chapitre 1. Ne sera pas traité dans ce devoir.