

## Prolongement analytique de la fonction $\Gamma$ d'Euler et de la fonction $\zeta$ de Riemann. Corrigé

Les deux parties de ce devoir sont indépendantes, mais utilisent toutes les deux le théorème suivant (On peut par exemple consulter l'excellent Rudin, "Real and Complex analysis", ch 10 et 15, pour tout ce qui concerne le prolongement analytique)

**Théorème 1 (Prolongement analytique)** Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{C}$ , i.e. un ouvert connexe non vide, et soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  une application holomorphe. Soit  $Z(f)$  l'ensemble des zéros de  $f$ . Si  $f$  n'est pas identiquement nulle sur  $\Omega$ , alors  $Z(f)$  n'a pas de point d'accumulation dans  $\Omega$ ; en particulier, il est au plus dénombrable.

Souvent, on l'applique de la manière suivante: soient  $f$  et  $g$  deux applications holomorphes sur  $\Omega$  qui coïncident sur un sous-ensemble de  $\Omega$  ayant un point d'accumulation. Alors elles coïncident partout sur  $\Omega$ .

### Partie I : Prolongement de la fonction $\Gamma$ d'Euler

Les questions sont rédigées de façon assez indépendante: vous pouvez admettre le résultat d'une question et continuer le plus loin possible.

Soit  $\Gamma$  la fonction définie par  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ .

1.a. Montrer (en rédigeant et justifiant très soigneusement) que  $\Gamma$  est définie et holomorphe sur  $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\}$ .

1.b. Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $\operatorname{Re} z > 0$ , on a  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ .

1.c. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Gamma(n+1) = n!$ .

2.a. Soit  $f_n : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{1}_{]0,n[}(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$ , avec  $x > 0$ . Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et converge simplement vers une fonction  $f$  que l'on identifiera.

2.b. En déduire que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} \quad \text{pour tout } x > 0.$$

3.a. Soit  $R > 0$ . Montrer qu'il existe une constante  $C(R) > 0$  telle que si  $k > R$  et  $|z| < R$  alors  $\left| \ln\left(1 + \frac{z}{k}\right) - -z \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right| \leq \frac{C(R)}{k^2}$ .

3.b. En déduire que la série  $\sum_{k \geq [R]+1} \left( \ln\left(1 + \frac{z}{k}\right) - z \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right)$  converge normalement sur tout disque  $D(0, R)$ ,  $R > 0$ .

4. Montrer que la fonction  $G : z \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(z+1)\dots(z+n)}{n!n^z}$  est définie et entière.

5. Conclure que  $\Gamma$  se prolonge en une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ .

1.a) Pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et  $z \in \mathbb{C}$ , on a  $|e^{-t}t^{z-1}| \leq e^{-t}t^{\operatorname{Re}(z)-1}$ . L'application  $t \geq 0 \mapsto e^{-t}t^{\operatorname{Re}(z)-1}$  est continue (donc mesurable) sur  $\mathbb{R}_+^*$  et intégrable sur  $[1, +\infty[$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ .

Si  $\operatorname{Re}(z) > 0$ , alors l'application  $t \mapsto e^{-t}t^{\operatorname{Re}(z)-1} \leq t^{\operatorname{Re}(z)-1}$  est continue et intégrable sur  $]0, 1]$ . Donc  $\Gamma$  est bien définie sur  $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$ .

\* Pour tout  $t \geq 0$ , l'application  $z \mapsto e^{-t}t^{z-1}$  est holomorphe sur  $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$  et sa dérivée est l'application holomorphe  $z \mapsto e^{-t} \ln(t)t^{z-1}$ .

\* Pour tout  $z \in \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$ , l'application  $t \mapsto e^{-t} \ln(t)t^{z-1}$  est continue et intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

\* De plus, sur le fermé  $F_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) \geq \varepsilon > 0\}$ , pour tout  $z \in F_\varepsilon$  et  $t > 0$ ,  $|e^{-t} \ln(t)t^{z-1}| \leq e^{-t}t^{\varepsilon-1}$ , et cette dernière fonction de  $t$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Le théorème de dérivation sous le signe  $\int$  assure donc que l'application  $\Gamma$  est holomorphe sur  $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$ .

1.b. Ceci se fait par une intégration par parties immédiate.

1.c. On calcule  $\Gamma(1) = \int_{\mathbb{R}_+^*} e^{-t} dt = 1$ . La formule en découle immédiatement.

2.a. Dans cette question,  $x$  est réel. Il est classique que pour  $t \geq 0$ , la suite  $\left(1 - \frac{t}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $e^{-t}$ . On en déduit que  $f_n(t)$  converge simplement vers  $e^{-t}t^{x-1}$ . Montrons qu'à  $t > 0$  fixé, la suite  $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante. Si  $t \geq n$ , il est clair que  $f_n(t) \leq f_{n+1}(t)$ . Reste à traiter le cas  $t \in ]0, n[$ .

Soit  $t > 0$  et soit la fonction  $y \in ]t, +\infty[ \mapsto \left(1 - \frac{t}{y}\right)^y$ . Posons  $\varphi(y) = y \ln\left(1 - \frac{t}{y}\right)$ . Un calcul donne  $\varphi'(y) = \ln\left(1 - \frac{t}{y}\right) + \frac{t}{y-t}$  puis  $\varphi''(y) = \frac{-t^2}{y(y-t)^2} < 0$ . Un tableau de variation montre aisément que  $\varphi'$  décroît de  $+\infty$  à 0, donc est positive, donc  $\varphi$  est croissante. La fonction  $y \mapsto \left(1 - \frac{t}{y}\right)^y$  est donc elle aussi croissante. Donc la suite  $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

2.b. Une application immédiate du théorème de convergence monotone de Beppo-Levi, vue la question précédente, donne  $\Gamma(x) = \int_{\mathbb{R}_+^*} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+^*} f_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$ . Calculons cette dernière intégrale. Par un changement de variable immédiat, on a

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \int_0^1 (1-y)^n n^x y^{x-1} dy = n^x \int_0^1 (1-y)^n y^{x-1} dy$$

D'autre part, par récurrence, à l'aide d'intégrations par parties successives, on montre que pour tout  $x > 0$ ,

$$\int_0^1 (1-y)^n y^{x-1} dy = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}. \quad \text{On en déduit que } \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

3.a. Remarquons que  $k > R$  équivaut à  $k \geq [R] + 1 > R$ , où le crochet désigne la partie entière de  $R$ . Notons

aussi que sur  $\mathbb{C}$ , le logarithme népérien est bien défini comme une série entière : pour tout  $z \in D(0, 1)$ ,  $\ln(1+z) := \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$ .

Si  $k > R$ ,  $|\frac{z}{k}| < 1$  et  $|\frac{1}{k}| < 1$ , un développement en série entière donne :

$$\begin{aligned} \left| \ln\left(1 + \frac{z}{k}\right) - z \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n (-1)^{n+1}}{k^n n} - z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n k^n} \right| = |z| \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n k^n} (z^{n-1} - 1) \right| \\ &\leq |z| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n k^n} |z^{n-1} - 1| \end{aligned}$$

Si  $|z| < R$  et  $k > R$ , c'est-à-dire si  $k \geq [R] + 1$ , on obtient la majoration

$$\left| \ln\left(1 + \frac{z}{k}\right) - z \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right| \leq R \sum_{n \geq 2} \frac{R^{n-1} + 1}{n k^n} \leq \frac{R}{k^2} \sum_{n \geq 0} \frac{R^{n+1} + 1}{n([R] + 1)^n} = \frac{C(R)}{k^2}.$$

**3.b.** On décompose la série en  $\sum_{n \leq R} + \sum_{n > R}$ . Le deuxième terme est normalement convergent sur  $D(0, R)$  d'après la question précédente. Sa somme est donc une fonction holomorphe sur  $D(0, R)$ . Le premier terme est une somme finie de termes holomorphes sur leur domaine de définition.

**4.** Pour  $n \geq 1$ , notons  $G_n$  la fonction entière (i.e. holomorphe sur  $\mathbb{C}$  tout entier) définie par  $G_n(z) = \frac{z(z+1)\dots(z+n)}{n! n^z}$ . Remarquons que  $\ln n = \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$ . On obtient aisément  $G_n(z) = z\left(1 + \frac{1}{n}\right)^z \prod_{k=1}^{[R]} \frac{\left(1 + \frac{z}{k}\right)}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^z} \times \exp\left(\sum_{k=[R]+1}^n \left(\ln\left(1 + \frac{z}{k}\right) - z \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)\right)$ .

La question précédente nous dit que pour tout  $R > 0$  arbitrairement fixé, la série ci-dessus sommée pour  $k \geq [R] + 1$ , est normalement convergente sur le disque  $D(0, R)$ .

L'exponentielle (définie sur  $\mathbb{C}$  par son développement en série entière  $\exp(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ ) est une fonction entière.

Le dernier produit est l'exponentielle de la somme partielle d'une série normalement convergente sur  $D(0, R)$ . Il converge donc vers une limite qui est une fonction holomorphe non nulle sur  $D(0, R)$ .

Les premiers termes sont holomorphes, et ne s'annulent que si  $z \in \mathbb{Z}^- \cap D(0, R)$ .

Finalement, ceci étant vrai pour tout  $R > 0$ , on en déduit que  $G_n(z)$  converge pour tout  $z \in \mathbb{C}$  vers  $G(z)$ , et  $G$  est entière et ne s'annule qu'en  $\mathbb{Z}^-$ .

**5.** Les zéros de  $G$  sont les entiers négatifs ou nuls. Elle n'a pas d'autre zéro d'après la question précédente.

On en déduit que  $\frac{1}{G}$  est bien définie et holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ . D'après la question 2.b.  $\frac{1}{G}$  coïncide avec  $\Gamma$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Le théorème de prolongement analytique permet de conclure que  $\frac{1}{G}$  est un prolongement analytique de  $\Gamma$  à  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ .

### Prolongement de la fonction $\zeta$ de Riemann

Les questions sont rédigées de façon assez indépendante : vous pouvez admettre le résultat d'une question et continuer le plus loin possible.

Soit  $\zeta$  la fonction définie par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

*Prolongement à  $\{\operatorname{Re}(s) > 0\} \setminus \{1\}$*

**1.** Montrer (en rédigeant et justifiant très soigneusement) que  $\zeta$  est définie et holomorphe sur  $\{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s > 1\}$ .

**2.** On note  $\{x\} = x - [x]$  la partie fractionnaire de  $x$ . Montrer que

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{n^s} = \int_1^N \frac{dt}{t^s} - s \int_1^N \{t\} \frac{dt}{t^{s+1}} = \frac{1}{s-1} - \frac{N^{1-s}}{s-1} - s \int_1^N \{t\} \frac{dt}{t^{s+1}}.$$

**3.** Soit  $g(s) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} \right)$ . Montrer que  $g$  est définie et holomorphe sur  $\{\operatorname{Re} s > 0\} \setminus \{1\}$ . Conclure.

*Prolongement à  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$*

**4.** Supposons  $\operatorname{Re} s > 1$ . Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 y} (y^{s/2-1}) dy.$$

**5.a.** Soit  $\theta(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}$ , et  $\tilde{\theta}(t) = \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 t}$ . Montrer que  $\theta$  et  $\tilde{\theta}$  sont définies sur  $\mathbb{R}_+^*$  et qu'elles se prolongent en des fonctions holomorphes sur  $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$ .

**5.b.** On admet que  $\theta\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{t} \theta(t)$ . (Vous pouvez chercher une démonstration, vous-même, ou dans un livre.) Vérifier que  $\tilde{\theta}(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \left( 2\tilde{\theta}\left(\frac{1}{t}\right) + 1 \right) - \frac{1}{2}$ .

6. Montrer (en utilisant 4) que  $\tilde{\theta}(y)y^{s/2-1}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  lorsque  $\operatorname{Re}(s) > 1$ .

7.a On note  $I_1 = \int_0^1 \tilde{\theta}(y)y^{s/2-1} dy$  et  $I_2 = \int_1^{+\infty} \tilde{\theta}(y)y^{s/2-1} dy$ . À l'aide de la question 5.b, montrer que

$$I_1 = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^{+\infty} t^{-s/2-1/2} \tilde{\theta}(t) dt.$$

7.b. En déduire que si  $\operatorname{Re}(s) > 1$ , on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{\pi^{s/2}}{2(s-1)\Gamma(s/2+1)} + \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \int_1^{+\infty} \tilde{\theta}(y)(y^{-s/2-1/2} + y^{s/2-1}) dy.$$

8.a. Montrer que (lorsque  $s = 1$ )  $\frac{\pi^{1/2}}{2\Gamma(3/2)} = 1$ .

8.b. Montrer qu'on peut écrire  $\frac{\pi^{s/2}}{2(s-1)\Gamma(s/2+1)} = \frac{1}{s-1} + \psi(s)$  où  $\psi$  est une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$ .

9. Montrer que l'intégrale de droite dans la question 7b est définie pour tout  $s \in \mathbb{C}$  et holomorphe en  $s \in \mathbb{C}$ . Conclure.

1. Si  $\operatorname{Re}(s) > 1$ , alors  $|\frac{1}{n^s}| = \frac{1}{n^{\operatorname{Re}(s)}}$ , d'où l'on déduit que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$  est absolument convergente. Soit maintenant  $\varepsilon > 0$ , et  $F_\varepsilon = \{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) \geq 1 + \varepsilon\}$ . Si  $s \in F_\varepsilon$ , alors  $|\frac{1}{n^s}| \leq \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ . La série est donc normalement convergente sur  $F_\varepsilon$ , et donc sa somme est holomorphe sur  $F_\varepsilon$  (car  $s \mapsto n^{-s}$  est une application holomorphe sur  $\mathbb{C}$ ). Comme  $\varepsilon$  est arbitraire, on en déduit que  $\zeta$  est bien définie et holomorphe sur  $\{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > 1\}$ .

2. La deuxième égalité est évidente, montrons donc la première. Calculons (par une intégration par parties)

$$-s \int_1^N \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt = \sum_{n=2}^N \int_{n-1}^n \frac{-s(t-n+1)}{t^{s+1}} dt = \sum_{n=2}^N \left[ \frac{(t-n+1)}{t^s} \right]_{n-1}^n - \int_{n-1}^n \frac{1}{t^s} dt = \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^s} - \int_1^N \frac{dt}{t^s}$$

3. D'après la question précédente, si  $\operatorname{Re}(s) > 1$ ,  $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} = \frac{s}{s-1} - s \int_1^N \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt$ . Pour tout  $t > 0$ , la

partie fractionnaire vérifie  $0 \leq \{t\} \leq 1$ . On en déduit que si  $\operatorname{Re}(s) > 0$ , l'intégrale  $\int_1^N \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt$  est absolument convergente lorsque  $N \rightarrow \infty$ . En particulier, le terme de droite de l'égalité admet une limite finie pour tout  $s \in \{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > 0\}$ .

De plus, si  $s \in F_\varepsilon$ ,  $|\frac{\{t\}}{t^{s+1}}| \leq \frac{1}{t^{s+1}}$ . On en déduit que les intégrales  $\int_1^N \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt$  sont normalement convergentes quand  $N \rightarrow \infty$  sur  $F_\varepsilon$ , et donc leur limite est holomorphe sur  $F_\varepsilon$ . Ceci étant vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'application  $s \mapsto \int_0^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt$  est holomorphe sur  $\{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > 0\}$ .

L'application  $s \mapsto \frac{s}{s-1}$  est holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ . Donc  $g$ , qui était a priori définie et holomorphe sur  $\{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > 1\}$ , est en réalité définie et holomorphe sur  $\{s \in \mathbb{C}, s \neq 1 \text{ et } \operatorname{Re}(s) > 0\}$ .

Lorsque  $\operatorname{Re}(s) > 1$ ,  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^{1-s}}{s-1} = 0$ . En particulier,  $g(s) = \zeta(s)$ . L'application  $g$  est donc un prolongement analytique de  $\zeta$  à  $\{s \in \mathbb{C}, s \neq 1 \text{ et } \operatorname{Re}(s) > 0\}$ .

4. Partons de l'expression de  $\Gamma(\frac{s}{2})$ . À l'aide du changement de variable  $t = \pi n^2 y$ , on trouve

$$\Gamma(\frac{s}{2}) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s/2-1} dt = (\pi n^2)^{s/2} \int_0^\infty e^{-\pi n^2 y} y^{s/2-1} dy = \pi^{s/2} n^s \int_0^\infty e^{-\pi n^2 y} y^{s/2-1} dy$$

La formule voulue en découle.

5.a. Pour tout  $t > 0$ , la série  $\sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 t}$  est bien sûr convergente. On en déduit que  $\tilde{\theta}(t)$  est bien définie, et  $\theta(t) = 1 + 2\tilde{\theta}(t)$  aussi. Soit  $E_\varepsilon = \{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) \geq \varepsilon\}$ . Si  $z \in E_\varepsilon$ , alors  $|e^{-\pi n^2 z}| \leq e^{-\pi n^2 \varepsilon}$ , d'où l'on déduit que  $\tilde{\theta}$  et  $\theta$  sont normalement convergentes, et donc holomorphes, sur  $E_\varepsilon$ . Comme  $\varepsilon$  est arbitraire, on en déduit que  $\tilde{\theta}$  et  $\theta$  sont holomorphes sur  $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$ .

5.b. C'est une conséquence élémentaire des relations  $\theta(t) = 2\tilde{\theta}(t) + 1$  et  $\theta(\frac{1}{t}) = \sqrt{t}\theta(t)$ .

6. Si  $t \geq 1$ ,  $e^{-\pi n^2 t} \leq e^{-\pi n^2}$  et la série  $\sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2}$  converge. Le théorème de convergence dominée donne donc  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}(t) = 0$ .

À l'aide de la relation  $\tilde{\theta}(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}(2\tilde{\theta}(\frac{1}{t}) + 1) - \frac{1}{2}$ , on en déduit que quand  $t \rightarrow 0$ ,  $\tilde{\theta}(t) \sim \frac{1}{2\sqrt{t}}$ . En particulier la fonction  $y \mapsto \tilde{\theta}(y)y^{s/2-1}$  est équivalente en 0 à  $\frac{1}{2}y^{(s-3)/2}$ , qui est intégrable au voisinage de 0 ssi  $\operatorname{Re}((s-3)/2) > -1$ , soit encore  $\operatorname{Re}(s) > 1$ .

D'autre part, une majoration élémentaire donne  $\tilde{\theta}(t) \leq \sum_{n \geq 1} e^{-nt} = \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}$ . Autrement dit, lorsque  $t \rightarrow \infty$ ,  $\tilde{\theta}(t) = O(e^{-t})$ . La fonction  $y \mapsto \tilde{\theta}(y)y^{s/2-1}$  est donc clairement intégrable au voisinage de  $+\infty$ , et ce, pour tout  $s \in \mathbb{C}$ . Comme elle est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ , elle est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**7.a.** On fait le changement de variable  $z = \frac{1}{y}$  dans  $I_1$ . À l'aide de la relation obtenue en 5.b., on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \tilde{\theta}(y) y^{s/2-1} dy = \int_0^1 \left( \frac{1}{2\sqrt{y}} (2\tilde{\theta}(\frac{1}{y}) + 1) - \frac{1}{2} \right) y^{s/2-1} dy \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 y^{s/2-1} dy + \frac{1}{2} \int_0^1 y^{s/2-3/2} dy + \int_1^\infty \tilde{\theta}(z) z^{-1-s/2} dz \\ &= -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \int_1^\infty \tilde{\theta}(z) z^{-s/2-1/2} dz \end{aligned}$$

**7.b.** Soit  $s \in \mathbb{C}$  tq  $\operatorname{Re}(s) > 1 + \varepsilon$ . Alors la fonction  $y \mapsto \tilde{\theta}(y) y^{s/2-1} = \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 y} y^{s/2-1}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  d'après la question 6. Donc le théorème de convergence dominée s'applique et permet d'invertir  $\sum$  et  $\int$  dans l'expression obtenue à la question 4. À l'aide du résultat de 7.a. (et de la relation  $s\Gamma(s/2) = 2\Gamma(s/2+1)$ ), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} &= \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \int_0^\infty \tilde{\theta}(y) y^{s/2-1} dy = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} (I_1 + I_2) \\ &= \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \left( \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} \right) + \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \int_1^\infty \tilde{\theta}(y) \left( y^{-s/2-1/2} + y^{s/2-1} \right) dy \\ &= \frac{\pi^{s/2}}{2(s-1)\Gamma(s/2+1)} + \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \int_1^\infty \tilde{\theta}(y) \left( y^{-s/2-1/2} + y^{s/2-1} \right) dy \end{aligned}$$

**8.a.** Calculons (par le changement de variable  $t = x^2$  puis par une intégration par parties)

$$\Gamma(3/2) = \int_0^\infty \sqrt{t} e^{-t} dt = \int_0^\infty 2x^2 e^{-x^2} dx = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

La dernière égalité est (ou doit être!!) bien connue, mais peut se calculer en observant que par Fubini, puis passage en coordonnées polaires,  $\left( \int_{\mathbb{R}_+^*} e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty r e^{-r^2} dr d\theta = \frac{\pi}{4}$ .

**8.b.** Calculons  $\frac{\pi^{s/2}}{2(s-1)\Gamma(s/2+1)} - \frac{1}{s-1} = \frac{1}{s-1} \left( \frac{\pi^{s/2}}{2\Gamma(s/2+1)} - \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma(3/2)} \right)$ . Il nous suffit donc de montrer que l'expression de droite est holomorphe sur  $\mathbb{C}$ . C'est a priori une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ , avec une singularité en  $s = 1$ . Mais lorsque  $s = 1$ , la quantité  $\frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2+1)} - \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma(3/2)}$  (holomorphe sur  $\mathbb{C}$  car  $\frac{1}{\Gamma} = G$  est entière d'après la partie I) s'annule. Elle s'écrit donc sous la forme  $\frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2+1)} - \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma(3/2)} = (s-1)\psi(s)$ , où  $\psi$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}$ . Le résultat voulu en découle.

**9.** On a vu plus haut que  $\tilde{\theta}(y) = O(e^{-y})$  en  $+\infty$ . Donc l'intégrale de droite converge pour tout  $s \in \mathbb{C}$ .

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $E_{a,b} = \{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) \in [a, b]\}$ . Il est immédiat de vérifier que ces intégrales sont normalement convergentes sur le fermé  $E_{a,b}$ , donc holomorphes sur  $E_{a,b}$ .  $a$  et  $b$  étant arbitraires, on en déduit que l'intégrale définit une fonction entière.

Pour conclure, nous avons montré que la fonction  $\zeta$  admet un prolongement holomorphe à  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ .

La conjecture de Riemann concerne les zéros de  $\zeta$ . Elle affirme qu'en dehors des zéros triviaux de  $\zeta$  (dus au fait que  $\frac{1}{\Gamma}$  s'annule sur  $-\mathbb{N}$ ), tous les zéros de  $\zeta$  sont situés sur la droite d'équation  $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$ . Si vous résolvez ou infirmez la conjecture, vous deviendrez très riche et très célèbre (... chez les matheux!)