Département de Mathématiques
Préparation à l'agrégation

Exercices sur les corps

1. a) Montrer que tout corps commutatif de degré fini différent de 1 sur $\mathbb{R}$ est isomorphe au corps $\mathbb{C}$ des complexes.
   b) Soit K un corps non commutatif contenant $\mathbb{R}$ et de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Montrer que si $x \in K - \mathbb{R}$ alors $\mathbb{R}(x)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Dans la suite on note ε_1 un élément de K tel que $\varepsilon_1^2 = -1$.
   c) Montrer qu'il existe $y \in K$ tel que $y \notin \mathbb{R}(\varepsilon_1)$. On pose $z = y\varepsilon_1 - \varepsilon_1 y$; montrer que z est non nul et que $z\varepsilon_1 = -\varepsilon_1 z$. En déduire que $z^2 \in \mathbb{R}(\varepsilon_1)$, puis que $z^2 \in \mathbb{R}$. Montrer que $z^2 < 0$. Dans la suite on pose $\varepsilon_2 = z/\sqrt{-z^2}$.
   d) Soit $\varepsilon_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2$. Montrer que 1, ε_1, ε_2 et ε_3 forment une base sur $\mathbb{R}$ d'un sous-corps H de K.
   e) Montrer que en appliquant la question c) que si $H \neq K$, il existe un élément ε_4 de K de carré -1 qui vérifie $\varepsilon_1\varepsilon_4 = -\varepsilon_4\varepsilon_1$. Montrer qu'alors $\varepsilon_2\varepsilon_4$ et ε_1 commutent. En déduire une contradiction.
   f) Quelle est la conclusion de cette suite de questions ?
2. a) Quel est le polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ de $2\cos(2\pi/7)$? Montrer que les 3 racines de ce polynôme sont $2\cos(2\pi/7)$, $2\cos(4\pi/7)$ et $2\cos(6\pi/7)$.
   b) On pose $L = \mathbb{Q}(\cos(2\pi/7))$. Montrer que L a un automorphisme σ d'ordre 3.
   c) Montrer que $u = 2\cos(2\pi/7)$, $v = 2\cos(4\pi/7)$ et $w = 2\cos(6\pi/7)$ forment une base de L et que σ permute cycliquement u, v et w.
   d) Montrer que $u^2 = v+2$, $v^2 = w+2$ et $w^2 = u+2$. En déduire que $u^2v+v^2w+w^2u = 3$, que $uv^2 + vw^2 + wu^2 = -4$ et que $u^3 + v^3 + w^3 = -4$. Utiliser ces formules pour montrer que pour tout $\alpha \in L$ on a $\alpha\sigma(\alpha)\sigma^2(\alpha) = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x^2y + y^2z + z^2x) - 4(x^2z + y^2x + z^2x) - xyz$, où x, y et z sont les coordonnées de α dans la base (u, v, w).
   e) Montrer que si $\alpha = xu + yv + zw$ avec u, v et w entiers non tous pairs alors $\alpha\sigma(\alpha)\sigma^2(\alpha)$ est un entier impair.
   f) On considère un espace vectoriel K de dimension 3 sur L de base (e_1, e_2, e_3) et on le munit d'une multiplication $\mathbb{Q}$-linéaire en posant que e_1 est élément neutre, que $e_2^2 = e_3$, que $e_2^3 = 2e_1$ et que $xe_2 = e_2\sigma(x)$ pour tout $x \in L$. Dans la suite on identifiera e_1 à 1 et on posera $a = e_2$ et $a^2 = e_3$. On admettra que cette multiplication est associative. Montrer que la multiplication à droite par un élément de K est une application linéaire de K dans K, vu comme espace

vectoriel sur L. Quel est le déterminant $\Delta(k)$ de la multiplication à droite par $k = \alpha + \beta a + \gamma a^2$, où α, β et γ sont dans L ? Montrer en utilisant la question e) que si les coordonnées de α, β et γ dans la base (u, v, w) sont des entiers et si les coordonnées de α ne sont pas toutes paires $\Delta(k)$ est non nul. En déduire que pour tout élément non nul $k \in K$ le déterminant $\Delta(k)$ est non nul. Conclure que tout élément non nul de K a un inverse à droite, puis que K est un corps non commutatif. Montrer que le centre de K est $\mathbb{Q}$.

3. Soit F un corps commutatif. On considère l'anneau $F[[t]]$ des séries formelles à coefficient dans F et son corps des fractions $F((t))$.
   a) Montrer que tout élément de $F((t))$ s'écrit $\sum_{i \geq -n} a_i t^i$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_i \in F$.
   b) Soit σ un automorphisme de F ; on définit une loi $\star$ sur $F((t))$ en posant

$$\Big(\sum_{i \geq -m} a_i t^i\Big) \star \Big(\sum_{j \geq -n} b_j t^j\Big) = \sum_{k \geq -m-n} c_k t^k$$

   avec $c_k = \sum_{i+j=k} a_i \sigma^i(b_j)$. Montrer que si σ n'est pas l'identité on obtient ainsi une structure de corps non commutatif sur $F((t))$.